Préparation des oraux – probabilités

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs, strictement décroissante et de limite nulle. Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe une probabilité P sur $\mathbb{N}$ vérifiant :

$$P([\![n,+\infty[\![) = \lambda a_n.$$

2. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Pour $(A,B) \in \mathcal{A}^2$, on pose

$$d(A,B) = P(A\Delta B) \quad \text{où} \quad A\Delta B = (A\cup B)\setminus(A\cap B).$$

a) Vérifier que, pour A, B, C dans $\mathcal{A}$: $d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$.

b) En déduire : $|P(A) - P(B)| \leq P(A\Delta B)$.

3. Deux joueurs A et B s'affrontent durant des parties indépendantes. Le joueur A dispose d'une fortune égale à n wons, tandis que le joueur B dispose de $N-n$ wons (N fixé dans $\mathbb{N}^*$). À chaque tour, le joueur A a la probabilité $p \in]0,1[$ de l'emporter et le joueur B a la probabilité complémentaire $q = 1-p$ de gagner. Le joueur perdant cède alors un won au vainqueur. Le jeu continue jusqu'à la ruine d'un des deux joueurs.

On note a_n la probabilité que le joueur A l'emporte lorsque sa fortune initiale vaut n.

a) Que valent a_0 et a_N ? Établir la formule de récurrence

$$\forall n \in [\![1, N-1]\!] \quad a_n = pa_{n+1} + qa_{n-1}.$$

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = a_n - a_{n-1}$ est géométrique.

c) Calculer a_n en distinguant les cas $p = q$ et $p \neq q$.

d) Montrer que le jeu s'arrête presque sûrement.

4. *(CCP)* On donne n variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ admettant toutes une variance et l'on note S la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ munis de sa structure euclidienne canonique : $S = \left\{u = (u_1, \dots u_n) \in \mathbb{R}^n \Big/ \sum_{k=1}^{n} u_k^2 = 1\right\}$.

Exprimer $\max_{u\in S} V\left(\sum_{k=1}^{n} u_k X_k\right)$ à l'aide des valeurs propres de la “matrice des covariances”

$$C = (\mathrm{Cov}(X_i, X_j))_{1\leq i,j\leq n}.$$

Pour quels vecteurs u ce maximum est-il atteint ?

Exemple : qu'obtient-on dans le cas $n = 3$, si les X_k sont de même variance V et si tous les (X_i, X_j), pour $i \neq j$, ont le même coefficient de corrélation r ?

5. *(Mines)* Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, admettant une espérance.

Montrer que $E\left(\dfrac{1}{X}\right) \geq \dfrac{1}{E(X)}$ et préciser le cas d'égalité.

6. *(Centrale)* Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ et $Y = 1/X$. Donner $Y(\Omega)$ et la loi de Y. Montrer que Y^m est d'espérance finie pour tout $m \in \mathbb{N}$ et calculer $E(Y)$.

7. *(Mines)* Trouver le nombre moyen de lancers d'un dé équilibré à n faces jusqu'à obtention des n faces.

8. *(Mines)* Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $U = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ et $M = U^tU \in \mathcal{M}_n(\{0,1\})$.

a) Donner les lois de $\mathrm{rg}\, M$ et de $\mathrm{Tr}\, M$.

b) Quelle est la probabilité pour que M soit une matrice de projection ?

c) On note V le vecteur colonne dont toutes les composantes valent 1 et $S = {}^tVMV$.
Calculer l'espérance et la variance de S.

9. Un signal est diffusé et un bruit vient malheureusement s'ajouter à la transmission. Le signal est modélisé par une variable aléatoire discrète réelle S d'espérance m_S et de variance σ_S connues. Le bruit est modélisé par une variable aléatoire B indépendante de S d'espérance nulle et de variance $\sigma_B > 0$. Le signal reçu est $X = S + B$. Déterminer a, b réels pour que $Y = aX + b$ soit au plus proche de S, *i.e.* tel que l'espérance $E\left((Y - S)^2\right)$ soit minimale.

10. *(Centrale)* On donne $n + 2$ variables aléatoires $X_0, \ldots, X_{n+1}$ mutuellement indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.

Donner la loi de $Y_k = (X_k - X_{k+1})^2$. Les Y_k sont-elles indépendantes 2 à 2 ?

11. Deux joueurs lancent deux dés équilibrés. On veut déterminer la probabilité que les sommes des deux jets soient égales. On note X_1 et X_2 les variables aléatoires déterminant les valeurs des dés lancés par le premier joueur et Y_1 et Y_2 celles associées au deuxième joueur.

a) Déterminer la fonction génératrice de la variable aléatoire $Z = 14 + X_1 + X_2 - Y_1 - Y_2$.

b) En déduire la valeur de $P(X_1 + X_2 = Y_1 + Y_2)$.

12. *(Mines)* Deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivent les lois géométriques de paramètres respectifs p et q, éléments de $]0, 1[$.

a) Montrer que $Z = \min(X, Y)$ et $T = \max(X, Y)$ sont des variables aléatoires.

b) Donner leur fonction génératrice et — si elle existe — leur espérance.

13. Soit X une variable aléatoire discrète réelle. Sous réserve d'existence, on appelle *fonction génératrice des moments de* X l'application $M_X : t \mapsto E\left(e^{tX}\right)$.

a) Reconnaître M_X lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

b) On suppose que la fonction M_X est définie sur un intervalle $]-a, a[$ $(a > 0)$.

Montrer qu'elle y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N} \quad E(X^n) = M_X^{(n)}(0)$.

(Si X prend une infinité de valeurs, on pensera à se placer sur un segment inclus dans $]-a, a[$.)

14. *(X-ENS)* Des variables aléatoires indépendantes U_i, $i \in \mathbb{N}^*$, suivent une même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$ et Z est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose

$$X = \sum_{i=1}^{Z} U_i \quad \text{et} \quad Y = Z - X = \sum_{i=1}^{Z} (1 - U_i).$$

On note, pour tout n de $\mathbb{N}$, $p_n = P(X = n)$, $q_n = P(Y = n)$, $r_n = P(Z = n)$.

a) Montrer que : $\forall (k, \ell) \in \mathbb{N}^2 \quad P(X = k, Y = \ell) = \binom{k+\ell}{k} p^k (1-p)^\ell r_{k+\ell}$.

En déduire des expressions de p_k et q_ℓ en fonction de p et des r_n.

b) Montrer que, si Z suit une loi de Poisson, alors X et Y sont indépendantes.

c) On suppose que X et Y sont indépendantes et Z non presque sûrement nulle.

i. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $r_n = \sum_{k+\ell=n} p_k q_\ell$ et que p_0, p_1, q_0, q_1 sont strictement positifs.

ii. Montrer que : $\forall (k, \ell) \in \mathbb{N}^2 \quad p_{k+1} q_\ell (k+1)(1-p) = p_k q_{\ell+1} (\ell+1) p$.

iii. En déduire q_ℓ en fonction de p_0, p_1 et p. Conclure que Z suit une loi de Poisson.

15. *(X-ENS)* Déterminer les lois de X, Y, variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes, non presque sûrement constantes, telles que, en posant $S = X + Y$,

$$P(S > 4) = P(S = 3) = P(S = 1) = 0 \quad \text{et} \quad P(S = 0) = \frac{1}{6}, \quad P(S = 2) = \frac{1}{2}, \quad P(S = 4) = \frac{1}{3}.$$

16. *(X-ENS)* Une variable aléatoire discrète X, à valeurs dans $\mathbb{N}$, a une série génératrice G de rayon de convergence $R > 1$ vérifiant : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad x^2 + y^2 < R^2 \Rightarrow G(x)\, G(y) = \frac{1}{2} G\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$.

a) Déterminer $G(0)$ et montrer que : $\forall k \in \mathbb{N} \quad P(X = 2k + 1) = 0$.

b) Montrer que G est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1, que l'on précisera.

c) En déduire l'expression de G, puis les valeurs de $E(X)$ et $V(X)$.