Préparation des oraux – analyse

1. *(Centrale)* Donner un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}$.

2. *(Mines)* Étudier la suite (x_n) vérifiant $x_0 \in]0,1[$ et $x_{n+1} = x_n - x_n^2$. À l'aide de $\dfrac{1}{x_{n+1}} - \dfrac{1}{x_n}$, trouver un équivalent de x_n.

3. *(Centrale)* Montrer que :$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exists! x_n \in \mathbb{R} \quad e^{x_n} + x_n = n$; étudier la suite (x_n) et la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n^\alpha x_n}$. Montrer que : $x_n \underset{n\to\infty}{=} \ln n - \dfrac{\ln n}{n} + o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$.

4. *(Centrale)* Nature de $\sum u_n$, où $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$?

5. *(CCP)* Étudier, suivant les valeurs de α, la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha} \displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^7+1)^{1/6}}$.

6. *(Mines)* Soit $\theta \in \mathbb{R} \backslash \pi\mathbb{Z}$; étudier la convergence et calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2 + 2n\cos\theta - \sin^2\theta}$.

7. *(CCP)* Nature de $\sum u_n$, $\sum v_n$, où

$$u_n = \sqrt{\arctan(n^2+1)} - \sqrt{\arctan n^2}\ , \quad v_n = \sin\left(\sqrt{\arctan(n^2+1)}\right) - \sin\left(\sqrt{\arctan n^2}\right).$$

8. *(X)* Soit (a_n) une suite de réels positifs et σ une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Montrer que $\sum a_n$ converge si et seulement si $\sum a_{\sigma(n)}$ converge. Qu'en est-il si σ est seulement injective ? Surjective ?

9. *(Mines)* Soit $f : x \mapsto \ln\left(x^2+1\right) - \arctan x$. Étudier les zéros de $f^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

10. *(CCP)* Primitives de $x \mapsto \sqrt{1+\sin x}$.

11. *(Centrale)* Déterminer les limites en 0 et $+\infty$ de $\alpha \mapsto \alpha \cdot \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}}$.

12. *(Centrale)* Limite et équivalent de $I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t$ *(poser $t^n = x$)*.

13. *(Centrale)* Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x$, où f est continue sur $[0,1]$, à valeurs réelles.
Trouver les limites des suites (I_n) et $\big((n+1)I_n\big)$.

14. *(CCP)* Rayon de convergence de $\displaystyle\sum (-1)^n \frac{n!}{n^n} \cdot x^{3n-1}$. Étudier la convergence au bord.

15. *(Centrale)* Rayon de convergence et calcul de la somme de $\sum a_n x^n$, où $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + ... + \dfrac{1}{n}$.

16. *(CCP)* Existence et calcul de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\arcsin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$.

17. *(CCP)* Montrer que $f_n : t \mapsto \dfrac{\sin nt}{1+nt+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

18. *(Mines)* Calculer $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{t(1+t^2)}\mathrm{d}t$.

19. *(Centrale)* Pour $x > 0$, développer $s(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^{xt} - 1} \mathrm{d}t$ en série de fractions rationnelles.

Montrer que : $s(x) \underset{0^+}{\sim} \dfrac{\pi}{2x}$.

20. *(X)* Étudier la suite (u_n) où $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-kt}}{t} \mathrm{d}t$ pour k dans $\mathbb{N}^*$.

Montrer que (u_n) converge vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) e^{-t} \mathrm{d}t$.

21. *(Centrale)* Étudier l'arc défini par $x(t) = \dfrac{e^t}{1+t}$, $y(t) = \dfrac{te^t}{1+t}$; préciser les points d'inflexion.

22. *(ENS PT)* Étudier puis tracer la courbe donnée par $M(t) = \left(-\dfrac{2}{t^2}, \dfrac{1}{t^3} \right)$.

Donner les équations de la tangente et de la normale au point de paramètre t.

Montrer qu'il existe exactement deux droites qui sont à la fois tangente et normale à la courbe.

23. *(Centrale)* Trouver les $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $f'(x) = f(1 - x)$.

24. *(Mines)* Intégrer $2xy' + y = \ln(1 + x)$.

25. *(Centrale)* Soit f continue et intégrable sur $\mathbb{R}$; on considère l'équation différentielle (E) $y' - y + f = 0$. Montrer que (E) admet une unique solution F bornée sur $\mathbb{R}$; comment se comporte F à l'infini ?

26. *(CCP)* Résoudre sur $]0, \pi[$: $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$.

27. *(Mines)* Intégrer $xy'' - y' + 4x^3 y = 0$ *(changement de variable $x^2 = t$).*

28. *(CCP)* Montrer que (E) $t^2 y'' + 4ty' + \left(2 - t^2\right) y - 1 = 0$ admet une unique solution développable en série entière en 0 ; l'exprimer à l'aide des fonctions usuelles. Montrer que $t \mapsto -1/t^2$ est solution de (E). En déduire la solution générale de (E).

29. *(Centrale)* Soit $f : (x, y) \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n \left(x^2 + y^2\right)$ où $u_n : t \mapsto \dfrac{e^{-nt}}{n^2}$.

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$ et qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

30. *(CCP)* Sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$, $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{y}{x}$. Trouver f à l'aide du changement de variables $u = x$ et $v = \dfrac{y}{x}$.

31. *(Centrale)* Calculer $\displaystyle\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (t \ln t - at - b)^2 \, \mathrm{d}t$.

32. *(Mines)* Trouver maximum et minimum de $f : (x, y, z) \mapsto xy + yz + zx$ sur
$\Delta = \left\{ (x, y, z) \in (\mathbb{R}^{+*})^3 \ / \ x + y + z = 1 \right\}$.

33. *(CCP)* Soit la parabole $\mathcal{P} \ / \ y^2 = 2px$; la normale en M recoupe $\mathcal{P}$ en N.

Quelle est la longueur minimale de la corde $[M, N]$?

34. *(CCP)* Soient dans le plan $\mathcal{E} \ / \ 4x^2 + y^2 = 1$ et $\mathcal{D} \ / \ x - y = 0$.

Trouver les tangentes à $\mathcal{E}$ parallèles à $\mathcal{D}$. Déterminer les points de contact.

35. *(CCP)* Soit $\mathcal{S} \ / \ x^3 + y^3 = 1$. Déterminer les plans tangents à $\mathcal{S}$ passant par le point $(1, 1, 0)$.