Préparation des oraux – algèbre

1. *(X)* Trouver les sous-groupes finis de $\mathbb{R}^*$ et de $\mathbb{C}^*$ pour la multiplication.
Les groupes $(\mathbb{C},+)$ et $(\mathbb{C}^*,\times)$ sont-ils isomorphes ?

2. *(Centrale)* Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\left(X^2+X+1\right)^2$ divise $(X+1)^{6n+1}-X^{6n+1}-1$.

3. *(Mines)* Soit $(p,q)\in\mathbb{C}^2$. Donner une CNS pour que X^3+pX+q admette une racine double dans $\mathbb{C}$.

4. *(Mines)* Soit $n\in\mathbb{N}$ et $(a_k)_{0\le k\le n}\in\mathbb{K}^{n+1}$. Montrer que $a_0\neq 0$ si et seulement si

$$\forall Q\in\mathbb{K}[X]\quad \exists! P\in\mathbb{K}[X]\quad \sum_{k=0}^{n} a_k P^{(k)}=Q.$$

5. *(X)* Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $a\in\mathcal{L}(E,F)$ et $b\in\mathcal{L}(F,G)$.
Montrer que : $\operatorname{rg}(b\circ a)=\operatorname{rg}a \Leftrightarrow \operatorname{Im}a\cap\operatorname{Ker}b=\{0\}$.

6. *(Centrale)* Soient p,q deux projecteurs d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E tels que $\operatorname{Im}p\subset\operatorname{Ker}q$.
Montrer que $r=p+q-p\circ q$ est un projecteur. Déterminer $\operatorname{Ker}r$ et $\operatorname{Im}r$.

7. *(X)* Inverser la matrice de coefficient courant $a_{i,j}=y+\delta_{i,j}\cdot x$.

8. *(CCP)* Calculer $\begin{vmatrix} a+b & a+c & b+c\\ a^2+b^2 & a^2+c^2 & b^2+c^2\\ a^3+b^3 & a^3+c^3 & b^3+c^3\end{vmatrix}$.

9. *(X)* Soit $\phi:\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\to\mathbb{C}$, non constante, telle que, pour tout couple (A,B), $\phi(AB)=\phi(A)\phi(B)$.
Montrer que $\phi(A)=0$ si et seulement si A est non inversible. On montrera que, si F est un sous-espace de $\mathbb{C}^n$ de dimension $r<n$, il existe un endomorphisme nilpotent v tel que $\operatorname{Im}v=F$.

10. *(X)* Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2=A$, $B^2=B$.
Montrer que A et B sont semblables si et seulement si $\operatorname{rg}A=\operatorname{rg}B$.

11. *(X)* Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2=A$, $B^2=B$ et $AB=BA$.
Montrer que $\det(A-B)\in\{-1,0,1\}$.

12. *(CCP)* Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable. Montrer que $B=\begin{pmatrix} A & 2A\\ 2A & A\end{pmatrix}$ est diagonalisable.

13. *(Centrale)* Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $3n$, $u\in\mathcal{L}(E)$ tel que $u^3=0$ et $\operatorname{rg}u=2n$. Étudier l'endomorphisme v induit par u sur $\operatorname{Im}u$. En déduire que $\operatorname{rg}u^2=n$. Montrer qu'il existe une base de E telle que $M_B(u)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ I_n & 0 & 0\\ 0 & I_n & 0\end{pmatrix}$.

14. *(IMT)* Calculer A^n, où $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

15. *(X)* Existe-t-il $B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2=\begin{pmatrix} -1 & x & y\\ 0 & -1 & z\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$?

16. *(ENS)* Trouver les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que, pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $P(M)$ soit diagonalisable.

17. *(CCP)* Soit n impair et $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, possédant n valeurs propres de module 1 et telle que $\det A=1$.
Montrer que 1 est valeur propre de A.

18. *(Centrale)* Montrer que $\phi: P(X)\mapsto P(1-X)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$; est-il diagonalisable ?
Calculer $\exp\phi$.

19. *(Mines)* Soit $M \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ telle qu'il existe p réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, non nuls distincts deux à deux, et p matrices $A_1, \ldots, A_p$ de $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ vérifiant : $\forall n \in [\![1, p+1]\!] \quad M^n = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^n . A_i$. Montrer que M est diagonalisable et que la relation est vraie pour tout $n \geq 1$.

20. *(X)* Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ telle qu'il existe m dans $\mathbb{N}^*$ tel que A^m soit diagonalisable.
Montrer que A est diagonalisable.

21. *(Centrale)* Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ayant a pour unique valeur propre, de sous-espace propre associé de dimension 2. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

22. *(CCP)* Montrer qu'il n'existe pas de matrice A dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + I = 0$. Généralisation ?

23. *(Centrale)* Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable et $E_1, \ldots, E_p$ les sous-espaces propres de f et $\mathcal{C}(f) = \left\{g \in \mathcal{L}(E) \ / \ g \circ f = f \circ g\right\}$. Montrer que $\mathcal{C}(f)$ est isomorphe à $\mathcal{L}(E_1) \times \cdots \times \mathcal{L}(E_p)$. Quelle est la dimension de $\mathcal{C}(f)$? Dans le cas $p = n$, montrer que $\mathcal{C}(f) = \mathbb{K}[f]$.

24. *(X)* Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'équation $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

25. *(Centrale)* Quelles sont les matrices commutant avec $A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$?

26. *(Saint-Cyr)* Pour $A \in GL_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe $Q \in O(n)$ et $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, triangulaire supérieure, telles que $A = QR$; montrer que, si l'on choisit les coefficients diagonaux de R strictement positifs, cette décomposition est unique. Calculer Q et R pour $A = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ 7 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

27. *(CCP)* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique et telle que : $\exists k \in \mathbb{N}^* \quad A^k = I$. Montrer que $A^2 = I$.

28. *(Centrale)* Montrer que toute matrice symétrique réelle positive $A = (a_{i,j})$ a ses coefficients diagonaux positifs ou nuls. Montrer que, si $a_{i,i} = 0$, alors $\forall j \quad a_{i,j} = 0$.

29. *(Mines)* Montrer qu'un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien est ρ-lipschitzien si et seulement si toutes ses valeurs propres sont de module au plus égal à ρ.
Montrer que dans le cas d'un endomorphisme quelconque, seule une implication reste vraie.

30. *(CCP)* Déterminer les couples (p, q) de $\mathbb{R}^2$ tels que $A = p \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1-q & 1+q \\ 1+q & 1 & 1-q \\ 1-q & 1+q & 1 \end{pmatrix}$ soit une matrice de rotation. En donner alors les caractéristiques.

31. *(CCP)* Montrer que deux demi-tours distincts de l'espace commutent si et seulement si leurs axes sont orthogonaux.

32. *(CCP)* Soit A matrice antisymétrique réelle, montrer que $(A + I)(A - I)^{-1}$ est orthogonale (on montrera tout d'abord que $A + I$ et $A - I$ sont inversibles à l'aide des valeurs propres de A).

33. *(CCP)* Image du plan d'équation $x - 2y + z = 1$ par le demi-tour d'axe $D \left\{ \begin{array}{l} x - 2z = 1 \\ x - y = 3 \end{array} \right.$.

34. *(CCP)* Déterminer le centre et le rayon du cercle intersection de la sphère Σ d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z + 5 = 0$ et du plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x + y - z - 4 = 0$.

35. *(X)* Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des mesures des angles des triangles de $\mathbb{R}^2$ euclidien ayant leurs trois sommets à coordonnées entières. Montrer que : $\theta \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \tan\theta \in \mathbb{Q}$. Montrer que $\mathcal{E}$ est dense dans $[0, \pi]$. Montrer que, si θ_1 et θ_2 sont dans $\mathcal{E}$ et $\theta_1 + \theta_2 < \pi$, alors $\theta_1 + \theta_2 \in \mathcal{E}$.