T.D. 12 – Calcul différentiel – Courbes et surfaces

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}.$$

Étudier la continuité de f et de ses dérivées partielles en $(0,0)$. f est-elle différentiable en ce point ?

2. Montrer que l'application $z \mapsto 1/z$ est différentiable sur $\mathbb{C}^*$ et préciser sa différentielle en tout point.

3. Montrer que l'application $P \mapsto \displaystyle\int_0^1 P^2$ est différentiable sur $E = \mathbb{R}_n[X]$ et calculer sa différentielle.

4. Soient E un espace euclidien et u un endomorphisme symétrique de E.

a) Montrer que l'application $f : x \in E \mapsto (u(x)|x)$ est différentiable sur E et calculer sa différentielle en tout point.

b) Montrer que l'application $F : x \in E\backslash\{0\} \mapsto \dfrac{(u(x)|x)}{(x|x)}$ est différentiable sur $E\backslash\{0\}$ et que sa différentielle vérifie

$$\mathrm{d}F(a) = 0 \Leftrightarrow a \text{ est vecteur propre de } u$$

5. © <u>*Théorème d'Euler*</u> : soit C un *cône ouvert de sommet* O dans E (*i.e.* un ouvert de E tel que : $\forall u \in C \quad \forall t \in \mathbb{R}^{+*} \quad t.u \in C$). Une application f de C dans $\mathbb{R}$ est dite *homogène de degré* α *sur* C ($\alpha \in \mathbb{R}$ donné) si et seulement si :

$$\forall u \in C \quad \forall t \in \mathbb{R}^{+*} \quad f(t.u) = t^{\alpha}.f(u).$$

Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur C. Montrer que f est homogène de degré α sur C si et seulement si :

$$\forall u \in C \quad \mathrm{d}f(u)(u) = \alpha.f(u).$$

6. Trouver les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad x \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x^4+y^4}.$$

(On pourra utiliser le théorème d'Euler !)

7. On note $U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x < y\right\}$. Trouver les applications f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U vérifiant

$$\forall (x,y) \in U \quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 - y^2.$$

On utilisera le changement de variables $u = x + y$, $v = xy$.

8. Trouver les applications f de classe $\mathcal{C}^1$ sur le demi-plan ouvert $\Omega = \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ vérifiant

$$f(x,y)\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right) + x^2 + y^2 = 0.$$

9. Étudier les extrema des fonctions suivantes :

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & x^2+y^2+z^2-2xyz \end{array} \quad ; \quad g : \begin{array}{ccl} [0,1]^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & 3xy - x^3 - y^3 \end{array}$$

10. On se place dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, on note $O = (0,0)$, $A = (a,0)$ et $B = (0,b)$ (a, b fixés dans $\mathbb{R}^{+*}$). Déterminer, pour M décrivant l'intérieur du triangle OAB, le maximum du produit des distances de M aux trois côtés du triangle OAB.

11. Trouver les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que $\varphi : (x,y) \mapsto f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ soit harmonique sur $\Omega = \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ (c'est-à-dire vérifie $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$).

12. Soit $(a,b)\in(\mathbb{R}^{+*})^2$ et, dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique, $\mathcal{E}$ l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Soit un point $M_0\,(x_0,y_0)$ de $\mathcal{E}$; montrer que M_0 est un point régulier et donner une équation cartésienne de $\mathcal{T}_0$, tangente à $\mathcal{E}$ en M_0.

Déterminer les points de $\mathcal{E}$ où la tangente est orthogonale à $\mathcal{T}_0$.

13. Déterminer les plans tangents à la surface $\mathcal{S}$ / $z^3=xy$ qui contiennent la droite $\mathcal{D}$ / $\left\{\begin{array}{l} x=2 \\ y=3z-3 \end{array}\right.$.

14. *Le berlingot* : soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation cartésienne $x^2+y^2+z^2-2xyz-1=0$.

a) Quelle est la projection de $\mathcal{S}$ sur le plan xOy ?

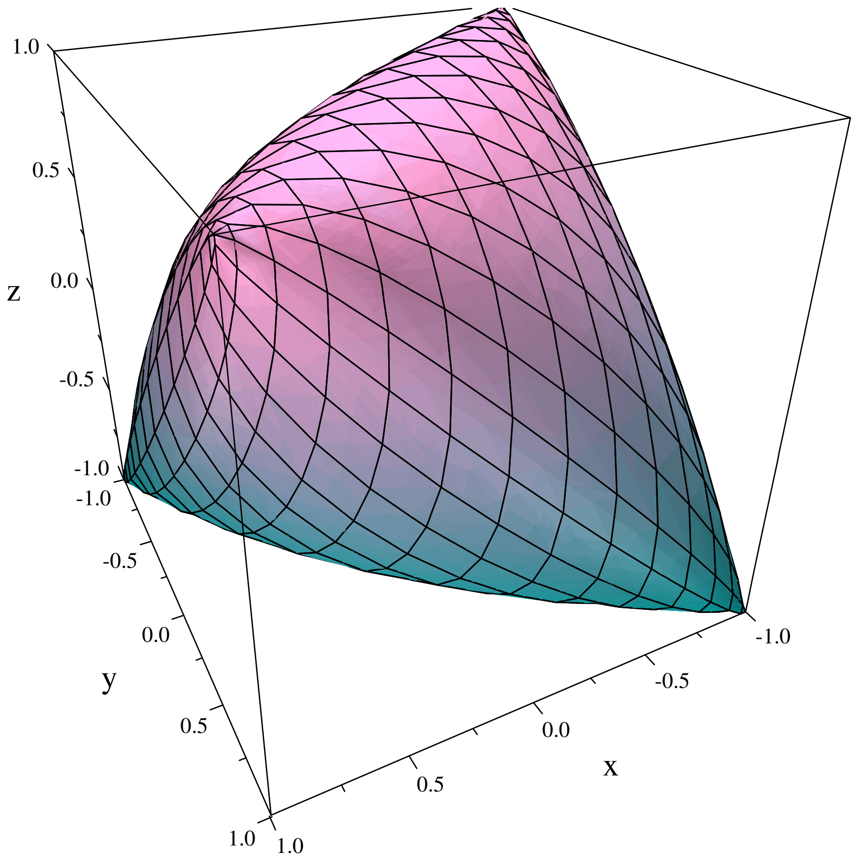
b) Quels sont les points singuliers de $\mathcal{S}$?

c) Quelle est la nature de la section de $\mathcal{S}$ par le plan $\mathcal{P}_h : z=h$?

d) Quelles sont les droites tracées sur $\mathcal{S}$?

e) Montrer que la partie de $\mathcal{S}$ limitée au cube $[-1,1]^3$ admet le paramétrage suivant :

$$(u,v)\mapsto(\cos u,\cos v,\cos(u+v))$$



15. *Fenêtre de Viviani* : montrer que la courbe paramétrée par

$$\left\{\begin{array}{l} x=a\sin 2t \\ y=a(1-\cos 2t) \\ z=2a\cos t \end{array}\right.$$

est tracée sur une sphère, un cylindre parabolique et un cylindre de révolution, que l'on précisera.