# T.D. 11b – Variables aléatoires discrètes

*Sauf mention contraire, les variables aléatoires utilisées sont définies sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

**1.** © Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et de même loi qu'une variable aléatoire fixée $X$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_n = \max\limits_{1\leq i\leq n} X_i$ et $m_n = \min\limits_{1\leq i\leq n} X_i$.

**a)** Montrer que $M_n$ et $m_n$ sont des variables aléatoires.

**b)** Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(M_n \leq k)$ en fonction de $P(X \leq k)$.

**c)** On suppose ici que $X$ suit la loi uniforme sur $[\![1, K]\!]$, où $K$ est un entier tel que $K > 1$. Calculer $E(M_n)$. Quelle est sa limite quand $n$ tend vers l'infini ?

**2.** © <u>*Loi hypergéométrique*</u> : cette loi usuelle (mais hors programme) modélise le tirage **sans remise** de $n$ boules dans une urne contenant $N$ boules dont une proportion $p$ de boules blanches (*i.e.* $Np$ boules blanches !). On désigne par $\Omega$ l'ensemble des tirages possibles (supposés équiprobables) et par $X$ le nombre de boules blanches dans un tirage donné.

Déterminer $X(\Omega)$ et la loi de $X$. On vérifiera que

$$P(X = k) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad ; \quad \text{on écrit } X \hookrightarrow \mathcal{H}(N, n, p)$$

Que devient $P(X = k)$ lorsque $N$ tend vers l'infini (avec $p$ constante) ?

Calculer $E(X)$ et $V(X)$. *On pourra justifier et utiliser la* ***formule de*** VANDERMONDE :

$$\forall (a, n) \in [\![0, N]\!]^2 \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{N-a}{n-k} = \binom{N}{n}$$

**3.** © <u>*Loi triangulaire*</u> : autre loi usuelle (et hors programme !) qui modélise la somme $S$ de deux variables aléatoires indépendantes $X$ et $Y$ suivant la même loi uniforme $\mathcal{U}([\![1, n]\!])$. Déterminer la loi de $S$, son espérance et sa variance. Pourquoi l'appelle-t-on "loi triangulaire" ?

**4.** Une urne contient $n$ boules numérotées de 1 à $n$ ($n$ entier donné, $n \geq 2$). On effectue deux tirages successifs **sans remise**. On note $X_1$ le numéro de la première boule tirée et $X_2$ celui de la seconde.

**a)** Déterminer la loi du couple $(X_1, X_2)$ et les lois marginales.

**b)** Les variables aléatoires $X_1$ et $X_2$ sont-elles indépendantes ?

**c)** Calculer leur coefficient de corrélation. Interpréter le résultat dans le cas $n = 2$.

**5.** © <u>*Temps d'attente du deuxième succès*</u> : on répète, de façon indépendante, une expérience aléatoire à l'issue de laquelle on obtient un succès avec une probabilité $p \in ]0, 1[$. On note $X$ (*resp.* $Y$) la variable aléatoire donnant le rang du premier (*resp.* deuxième) succès.

Retrouver la loi de $X$ et son espérance. Déterminer la loi conjointe du couple $(X, Y)$.

En déduire la loi de $Y$ et son espérance.

**6.** Un objet est scindé en $X$ morceaux au cours d'un test de résistance. La variable aléatoire $X$ suit la loi uniforme $\mathcal{U}([\![1, n]\!])$. Indépendamment des autres, chaque morceau a la probabilité $p$ d'être détruit durant le test. On note $Y$ le nombre de morceaux détruits pendant le test.

**a)** Pour $k \in [\![1, n]\!]$, donner la probabilité conditionnelle de $Y$ sachant $(X = k)$.

**b)** En déduire la loi de $Y$. $P(Y = j)$ *apparaîtra sous forme d'une somme, que l'on ne cherchera pas à calculer.*

**c)** Calculer l'espérance et la variance de $Y$.

**7.** Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi de POISSON de paramètre $\lambda > 0$ et $Y$ une variable aléatoire, indépendante de $X$, définie par $P(Y = 1) = P(Y = 2) = 1/2$.

**a)** Calculer la probabilité $p$ que $X$ prenne une valeur paire et montrer que $p > 1/2$.

**b)** Calculer la probabilité que $Z = XY$ prenne une valeur paire.

**8.** Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes, $X$ suivant la loi de POISSON de paramètre $\lambda > 0$, et $p \in ]0, 1[$.

**a)** Dans cette question $Y$ suit une loi de BERNOULLI de paramètre $p$.

On définit la variable aléatoire $Z$ par : $Z = 0$ si $Y = 0$ et $Z = X$ sinon.

Déterminer la loi de $Z$, son espérance et sa variance si elles existent.

**b)** On suppose maintenant que $Y$ suit une loi géométrique de paramètre $p$. Calculer $P(X = Y)$.

**9.** Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ fixé. Déterminer $a$ réel tel qu'il existe une variable aléatoire $X$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P(X = n) = an^2 \cdot \frac{\lambda^n}{n!}.$$

Donner alors la fonction génératrice de $X$ et son espérance.

**10.** Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes, $X$ étant à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $Y$ suivant la loi de BERNOULLI de paramètre $p$ ($p \in ]0, 1[$).

Déterminer la fonction génératrice de $Z = XY$ en fonction de celle de $X$ et montrer que $G_Z = G_Y \circ G_X$.

Si en outre $X$ suit la loi de POISSON de paramètre $\lambda > 0$, calculer l'espérance et la variance de $Z$.

**11.** *Dés de Sicherman* : on lance deux dés cubiques équilibrés, dont les faces portent respectivement les valeurs $(1, 2, 2, 3, 3, 4)$ et $(1, 3, 4, 5, 6, 8)$. On note $S$ la variable aléatoire prenant pour valeur la somme des deux résultats fournis par lesdits dés.

**a)** Déterminer la loi de probabilité de $S$. Commenter.

**b)** Existe-t-il d'autres valeurs, pour les faces des deux dés, conduisant à la même loi pour la somme ?

**12.** À chaque fois qu'on le lance, un dé donne un 6 avec la probabilité $p \in ]0, 1[$. On le lance $n$ fois, on note $X_n$ la variable aléatoire égale au nombre de 6 obtenus et $F_n = X_n/n$ la fréquence d'obtention d'un 6. On cherche à estimer expérimentalement la valeur de $p$.

**a)** Donner la loi de $X_n$, son espérance et sa variance.

**b)** Montrer que $V(F_n) \leq \dfrac{1}{4n}$.

**c)** En utilisant l'inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV, donner une condition suffisante sur $n$ pour que

$$P\left(|F_n - p| \geq 10^{-2}\right) \leq 0,05.$$

**d)** Que devient cette condition si l'on remplace $10^{-2}$ par $10^{-3}$ ?

**13.** © *Pseudo-solutions d'un système linéaire* : étant donnée une matrice $A$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on note $\Phi_A$ l'application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ canoniquement associée à $A$ ; on suppose $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que le système $(S)$ $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ n'admette pas de solution.

On appelle alors *pseudo-solution* de $(S)$ tout $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que :

$$\|AX_0 - B\| = \inf\left\{\|AX - B\|,\ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\right\}.$$

**a)** À l'aide de la projection orthogonale sur $\operatorname{Im}\Phi_A$, montrer que $(S)$ admet au moins une pseudo-solution ; si en outre $\Phi_A$ est injective, montrer que $(S)$ admet une unique pseudo-solution.

**b)** Pour $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, établir

$$X \text{ pseudo-solution de } (S) \Leftrightarrow \forall Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \quad (AY|AX - B) = 0 \Leftrightarrow {}^tAAX = {}^tAB.$$

**c)** *Méthode des moindres carrés* : étant donnés $n$ points $M_k = (x_k, y_k)$, $1 \leq k \leq n$, de $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique, on cherche une droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = ax + b$ telle que $\sum\limits_{k=1}^{n} M_kH_k{}^2$ soit minimum, où $H_k = (x_k, ax_k + b)$.

Montrer que ce problème se ramène à la recherche des pseudo-solutions d'un système $(S)$ de la forme $AX = B$, où l'on précisera les matrices $A$ et $B$.

Quand $\Phi_A$ est-elle injective ? Lorsque c'est le cas, déterminer la pseudo-solution de $(S)$.