T.D. 10 – Équations différentielles linéaires

1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $\left(x^2 - 4\,x\right)\, y' - (x+2)\, y = x$ (chercher un polynôme solution). Étudier le raccordement en 0.

b) $y' \sin t + y \cos t = \sin^2 t$. Étudier les possibilités de raccordement.

2. © Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ telle que $\lim\limits_{+\infty}(f+f') = 0$. Montrer que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

(On pourra exprimer f comme solution de l'équation différentielle $y' + y = h$ où $h = f' + f$!)

3. Soit $\lambda > 0$. Écrire à l'aide d'une intégrale la solution générale de (E) $xy' + \lambda y = \dfrac{1}{1+x}$.

Existe-t-il des solutions admettant une limite finie en 0 ?

Existe-t-il des solutions développables en série entière en 0 ?

4. Soient $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathcal{C}^0\left(\mathbb{R}, \mathbb{C}\right)$, 2π-périodique et (E) $y' + \lambda y = b$.

a) Montrer qu'une solution f de (E) sur $\mathbb{R}$ est 2π-périodique si et seulement si $f\left(0\right) = f\left(2\pi\right)$.

b) Discuter selon λ et b l'existence de solutions de (E) 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.

5. Résoudre les systèmes différentiels suivants :

a) $\begin{cases} x' = 3x - y + \cos t \\ y' = x + y + 2\sin t \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x' = y + z - 3x \\ y' = z + x - 3y \\ z' = x + y - 3z \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x' = 3x + y - z \\ y' = x + y + z \\ z' = 2x + 2z \end{cases}$

6. Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y'' - 2\alpha y' + y = (x+1)e^{\alpha x}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$ donné)

b) $(2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0$ (chercher une solution de la forme $x \mapsto e^{\alpha x}$)

c) $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$ (chercher une série entière solution, trouver les solutions maximales)

d) $x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1$ (poser $u = x^2 y$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$; étudier le recollement en 0)

e) $(1+t^2)^2 y'' + 2t(1+t^2)y' + my = \dfrac{t}{1+t^2}$ ($m \in \mathbb{R}$ donné ; poser $x = \arctan t$).

7. Condition nécessaire sur a, b respectivement $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{C}^0$ sur I pour que $y'' + a\left(x\right) y' + b\left(x\right) y = 0$ admette deux solutions y_1, y_2 telles que $y_2 = xy_1$? Est-ce une condition suffisante ?
Résoudre : $y'' + 2xy' + \left(x^2+1\right) y = x \exp\left(-x^2/2\right)$.

8. <u>*Équations de Riccati*</u> : ce sont les équations de la forme $y' = a\left(x\right) y^2 + b\left(x\right) y + c\left(x\right)$.
Lorsqu'on connaît une solution "particulière" y_0, le changement de fonction $y = z + y_0$ conduit à une équation de Bernoulli... Par exemple, en remarquant que $x \mapsto x^2$ est solution, intégrer

$$(E) \quad \left(1 + x^3\right) y' = y^2 + x^2 y + 2x$$

9. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ fixé. On appelle φ la solution maximale du problème de Cauchy :

$$y' = x^2 + y^2 \quad \text{et} \quad y\left(a\right) = b$$

et $]\alpha, \beta[$ son intervalle de définition.

a) Montrer que $\beta \leq a + \dfrac{\pi}{a}$.

b) En déduire que $\beta - \alpha \leq 2a + \dfrac{2\pi}{a}$ *(dans le cas $\alpha < -a$, on pourra utiliser $\psi : x \mapsto -\varphi\left(-x\right)$).*