11. Tracer la *deltoïde* Δ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos t + \cos 2t \\ y(t) = 2\sin t - \sin 2t \end{cases} \qquad t \in [-\pi, \pi].$$

Calculer la longueur de Δ.

<u>*Solution*</u> : la fonction $F : t \mapsto (x(t), y(t))$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et $F(-t)$ est le symétrique de $F(t)$ par rapport à Ox. Montrons de plus que $F(t + 2\pi/3)$ est l'image de $F(t)$ par la rotation de centre $O(0,0)$ d'angle $2\pi/3$ (comme le laisse supposer une première ébauche...). Il s'agit de vérifier que

$$R\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t+2\pi/3) \\ y(t+2\pi/3) \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad R = \begin{pmatrix} \cos(2\pi/3) & -\sin(2\pi/3) \\ \sin(2\pi/3) & \cos(2\pi/3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Or

$$\begin{aligned} x(t+2\pi/3) &= 2\cos(t+2\pi/3) + \cos(2t+4\pi/3) = 2\cos(t+2\pi/3) + \cos(2t-2\pi/3) \\ &= \cos(2\pi/3)[2\cos t + \cos 2t] - \sin(2\pi/3)[2\sin t - \sin 2t] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y(t+2\pi/3) &= 2\sin(t+2\pi/3) - \sin(2t+4\pi/3) = 2\sin(t+2\pi/3) - \sin(2t-2\pi/3) \\ &= \sin(2\pi/3)[2\cos t + \cos 2t] + \cos(2\pi/3)[2\sin t - \sin 2t] \end{aligned}$$

d'où le résultat !

Finalement, il suffit de tracer la courbe correspondant à $t \in [0, \pi/3]$, de compléter par la symétrie orthogonale par rapport à Ox et de faire subir à la courbe obtenue (correspondant à $t \in [-\pi/3, \pi/3]$) deux rotations successives de centre O d'angle $2\pi/3$, ce qui donnera la courbe complète (correspondant à $t \in [-\pi/3, 5\pi/3]$ qui est bien d'amplitude 2π !).

Cette propriété géométrique montre aussi que la longueur totale de la courbe (pour t décrivant un intervalle d'amplitude 2π) vaut

$$L = 6\int_0^{\pi/3} \left\|F'(t)\right\| \mathrm{d}t$$

or

$$\begin{aligned} \left\|F'(t)\right\|^2 &= x'(t)^2 + y'(t)^2 = 4\left[(\sin t + \sin 2t)^2 + (\cos t - \cos 2t)^2\right] \\ &= 4[2 + 2(\sin t \sin 2t - \cos t \cos 2t)] = 8(1 - \cos 3t) \\ &= 16\sin^2(3t/2) \end{aligned}$$

d'où

$$L = 24\int_0^{\pi/3} \sin(3t/2)\,\mathrm{d}t = 24\left[-\frac{2}{3}\cos(3t/2)\right]_0^{\pi/3}$$

soit

$$\boxed{L = 16.}$$

À comparer à $6\pi \approx 18,9$ qui est la longueur du cercle de rayon 3 dans lequel est inscrite la deltoïde.