T.D. 09 – Dérivation des fonctions à valeurs vectorielles, arcs paramétrés

1. Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ telle que : $f(0) = f(1) = f'(0) = 0$. Montrer que : $\exists c \in]0,1[\quad f'(c) = \dfrac{f(c)}{c}$.
Interpréter géométriquement ce résultat.

2. © Soit f la restriction de la fonction tan à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. On note $a_n = \dfrac{1}{n!}f^{(n)}(0)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$ *(on pourra remarquer que $f' = 1 + f^2$).*

En déduire le développement limité à l'ordre 7 en 0 de la fonction tan.

3. Déterminer la dérivée n-ième de la fonction arctan.

4. Soit $a \in \mathbb{R}$, E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $f : [a,+\infty[\to E$, de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f'(t) = \ell$. Montrer que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\cdot f(t) = \ell$.
(On pourra se ramener au cas $\ell = 0$, puis s'inspirer de la démonstration du théorème de Cesàro en utilisant l'inégalité des accroissements finis.)

5. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $f : \mathbb{R} \to E$ une application dérivable en 0 telle que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(2t) = 2f(t).$$

Montrer que f est linéaire.

6. Soit $M : \mathbb{R} \to O_n(\mathbb{R})$ une application dérivable.
Montrer, que pour tout t réel, la matrice ${}^tM(t)\,M'(t)$ est antisymétrique.

7. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que $\varphi : t \mapsto \det(\mathrm{Id}_E + t.u)$ est dérivable et calculer $\varphi'(0)$.

8. Montrer que l'arc paramétré défini par

$$\begin{cases} x(t) = e^{t-1} - t \\ y(t) = t^3 - 3t \end{cases}$$

comporte un point de rebroussement de seconde espèce que l'on précisera ; on situera, au voisinage de ce point, les deux branches de la courbe de part et d'autre d'un arc de parabole.

9. Reconnaître la courbe définie paramétriquement par

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{t^2+t+1} \\[2mm] y(t) = \dfrac{t}{t^2+t+1} \end{cases}.$$

Préciser ses éléments géométriques caractéristiques.

10. a) Étudier rapidement et tracer la courbe Γ définie paramétriquement par ($a > 0$ étant donné)

$$\begin{cases} x(t) &= 3at^2 \\ y(t) &= 2at^3 \end{cases}.$$

b) Déterminer la *courbe orthoptique* $\mathcal{C}$ de Γ (c'est-à-dire l'ensemble des points du plan d'où l'on peut mener deux tangentes à Γ qui soient perpendiculaires). Tracer $\mathcal{C}$ sur le même graphique que Γ.

11. Tracer la *deltoïde* Δ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos t + \cos 2t \\ y(t) = 2\sin t - \sin 2t \end{cases} \quad t \in [-\pi,\pi].$$

Calculer la longueur de Δ.