

T.D. 08 – Espaces préhilbertiens réels et euclidiens

1. © Polynômes orthogonaux - généralités : soient a, b dans $\overline{\mathbb{R}}$ ($a < b$) et ω une application continue de $]a, b[$ dans \mathbb{R}^+ , s'annulant en un nombre fini de points et telle que, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, la fonction $t \mapsto P(t)\omega(t)$ soit intégrable sur $]a, b[$.

a) Montrer que l'on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ en posant :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2 \quad (P|Q) = \int_a^b P(t)Q(t)\omega(t)dt.$$

b) Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite orthonormalisée de la suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$, par la méthode de Schmidt pour ce produit scalaire. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, e_n est scindé, à racines simples, toutes éléments de $]a, b[$.

(On pourra poser $Q = \prod_{k=1}^p (X - \alpha_k)$, où les α_k sont les racines d'ordre impair de e_n appartenant à $]a, b[$, puis s'intéresser au produit $Q \times e_n$ pour montrer que $p = n$.)

2. © Soit p un projecteur d'un espace préhilbertien réel E . Montrer que p est une projection orthogonale si et seulement si :

$$\forall u \in E \quad \|p(u)\| \leq \|u\|.$$

3. © Déterminant de Gram : soit E un espace vectoriel euclidien, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \leq \dim E$, $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale directe d'un sous-espace orienté de E contenant u_1, \dots, u_n ; on note A la matrice du système (u_1, \dots, u_n) dans la base \mathcal{B} et $G(u_1, \dots, u_n)$ la matrice $((u_i|u_j))_{1 \leq i, j \leq n}$, appelée *matrice de Gram* du système (u_1, \dots, u_n) .

a) Montrer que $G(u_1, \dots, u_n) = {}^tAA$. En déduire, lorsque $n = \dim E$, la propriété du produit mixte :

$$[u_1, \dots, u_n]^2 = \det G(u_1, \dots, u_n)$$

b) Montrer que $\text{rg } A = \text{rg } ({}^tAA)$; en déduire : $\text{rg}(u_1, \dots, u_n) = \text{rg } G(u_1, \dots, u_n)$.

c) Soit F un sous-espace strict de E muni d'une base (b_1, \dots, b_p) et v un vecteur de E . Montrer que la distance d de v à F est donnée par :

$$d^2 = \frac{\det G(b_1, \dots, b_p, v)}{\det G(b_1, \dots, b_p)}$$

4. Soit E un espace vectoriel euclidien, $p \in \mathbb{N}^*$, $p \leq \dim E$ et $(e_k)_{1 \leq k \leq p} \in E^p$. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

$$(i) \quad \forall u \in E \quad \|u\|^2 = \sum_{k=1}^p (e_k|u)^2$$

$$(ii) \quad \forall u \in E \quad u = \sum_{k=1}^p (e_k|u) \cdot e_k$$

$$(iii) \quad (e_k)_{1 \leq k \leq p} \text{ est une base orthonormale de } E.$$

5. Soit \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{R}^4 , muni de sa structure euclidienne canonique.

Déterminer la matrice dans \mathcal{B} de la projection orthogonale p sur le plan F d'équations :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases}.$$

6. Déterminer : $\inf \left\{ \int_0^{\pi/2} (a \cos x + b \sin x - \cos 2x)^2 dx, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

7. Soit \mathcal{S} l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A = (a_{i,j})$ donnée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Déterminer :

$$\inf \left\{ \sum_{1 \leq i, j \leq n} (m_{i,j} - a_{i,j})^2, M = (m_{i,j}) \in \mathcal{S} \right\}.$$

8. Soit E un espace vectoriel euclidien, F et G deux sous-espaces supplémentaires de E et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G . Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- a) s est une symétrie orthogonale (i.e. $G = F^\perp$) ;
- b) s est un automorphisme orthogonal ;
- c) s est un endomorphisme symétrique.

9. © Décomposition QR : soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$; montrer qu'il existe une matrice orthogonale $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure R ("right triangular") telles que $A = QR$ (on pourra utiliser l'orthonormalisation de Gram-Schmidt).

Programmer en Python la détermination de Q et de R .

Quel est l'intérêt de cette décomposition pour la résolution du système linéaire $AX = B$?

10. © Double produit vectoriel

Soient $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ quatre vecteurs d'un espace vectoriel euclidien orienté E , de dimension 3.

Montrer que : $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{c} & \vec{b} \cdot \vec{c} \\ \vec{a} \cdot \vec{d} & \vec{b} \cdot \vec{d} \end{vmatrix}$.

En déduire la formule du double produit vectoriel

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{a}.$$

Application : division vectorielle

Résoudre l'équation $\vec{a} \wedge \vec{u} = \vec{b}$ d'inconnue $\vec{u} \in E$, \vec{a} et \vec{b} étant donnés dans E .

11. © Expression intrinsèque d'une rotation : soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, \vec{a} un vecteur unitaire de E , θ réel et r la rotation d'axe orienté par \vec{a} d'angle θ . Montrer que :

$$\forall \vec{u} \in E \quad r(\vec{u}) = p(\vec{u}) + \cos \theta \cdot q(\vec{u}) + \sin \theta \cdot \vec{a} \wedge \vec{u}$$

où p est la projection orthogonale sur l'axe $D = \text{Vect}(\vec{a})$ et $q = \text{Id}_E - p$ (on pourra commencer par le cas où \vec{u} est orthogonal à l'axe).

Montrer comment cette relation permet d'obtenir directement la matrice de r dans une base orthonormale directe donnée.

Expliquer comment déterminer l'axe et l'angle d'une rotation donnée par sa matrice dans une base orthonormale directe (on pourra séparer parties symétrique et antisymétrique).

12. Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormale directe de \mathbb{R}^3 et $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$; montrer qu'il existe une unique rotation r telle que $r(\vec{i}) = -\vec{j}$ et $r(\vec{u}) = \vec{u}$; préciser sa matrice dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

13. Étant données r et R , deux rotations de \mathbb{R}^3 , reconnaître $r \circ R \circ r^{-1}$.
À quelle condition r et R commutent-elles ?

14. Reconnaître l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 de matrice $\frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ -4 & 8 & 1 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

15. Soit S une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; montrer qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ dans \mathbb{R}^n et (U_1, \dots, U_n) dans $(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^n$ tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}_n \quad {}^t U_k U_k = 1 \quad \text{et} \quad S = \sum_{k=1}^n \lambda_k U_k {}^t U_k.$$

16. © Racine carrée d'une matrice symétrique positive : soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique et positive. Montrer qu'il existe une unique matrice $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique et positive, telle que $R^2 = S$.