

## T.D. 07 – Intégration sur un intervalle quelconque

1. Justifier l'existence des intégrales suivantes et établir les résultats fournis :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} t^n dt = n! \quad (n \in \mathbb{N}) ; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+ixy)} = \frac{\pi}{1+|y|} \quad (y \in \mathbb{R})$$

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}} dt = 4(\ln 2 - 1) ; \quad \int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan \theta} d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

2. Déterminer les polynômes  $P$  de  $\mathbb{R}[X]$  tels que la fonction  $t \mapsto \sqrt{P(t)} - t^2 - t - 1$  soit intégrable sur  $[a, +\infty[$  pour un certain réel positif  $a$ .

3. Pour tout entier  $n \geq 1$ , justifier l'existence de

$$I_n = \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{(3+t^2)^n}.$$

Calculer  $I_1$ . Trouver une relation entre  $I_n$  et  $I_{n+1}$ .

Étudier la nature de la suite  $(I_n)$  et celle de la série  $\sum I_n$ .

4. Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}$ , continue et telle que l'intégrale impropre  $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$  soit convergente. Montrer que, pour  $a$  et  $b$  réels strictement positifs,

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt \text{ converge et vaut } f(0) \ln \frac{b}{a}.$$

On pourra établir, pour  $0 < \varepsilon < X$ ,

$$\int_{\varepsilon}^X \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(u)}{u} du - \int_{aX}^{bX} \frac{f(u)}{u} du.$$

5. Montrer que :  $\int_n^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx \sim \frac{e^{-n}}{n}$ . En déduire que :  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{n+t} dt \sim \frac{1}{n}$ .

6. Une autre expression de la constante d'Euler

a) Établir

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \in [0, n] \quad 1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \frac{t}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^k ;$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \in [0, n] \quad 0 \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}.$$

b) On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_n = \int_0^1 \left[1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] \frac{dt}{t} \quad \text{et} \quad J_n = \int_1^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \frac{dt}{t}.$$

À l'aide du théorème de convergence dominée, montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} J_n = \int_0^1 \frac{e^{-1/t}}{t} dt.$$

c) Montrer que

$$I_n - J_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n.$$

d) En déduire

$$\int_0^1 \frac{1 - e^{-t} - e^{-1/t}}{t} dt = \gamma \quad (\text{la constante d'Euler !}).$$

7.  $f$  étant une fonction continue et bornée sur  $\mathbb{R}^+$ , montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{nf(t)}{1+n^2t^2} dt = \frac{\pi}{2} f(0).$$

8. À l'aide du développement en série de  $\frac{1}{1-x^2}$ , calculer  $\int_0^1 \frac{x^2 \ln x}{x^2-1} dx$ .

9. Montrer que  $S : t \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2t^2}$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

Prouver l'existence de  $\int_0^{+\infty} S(t) dt$  et la calculer.

10. Montrer que  $F : x \mapsto \int_0^{\pi/2} \ln(1+x \sin^2 t) dt$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -1, +\infty[$ .

Calculer sa dérivée et en déduire la valeur de  $F(x)$ .

11. Montrer que la fonction  $f : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2} \cos(xt) dt$  est solution sur  $\mathbb{R}$  d'une équation différentielle linéaire du premier ordre que l'on précisera. En déduire la valeur de  $f(x)$ .

12. © Intégrale de Dirichlet : on pose, pour  $x \in \mathbb{R}^+$ ,

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt.$$

a) Justifier la définition et la continuité de  $f$  sur  $\mathbb{R}^+$  (pour la continuité en 0, on pourra faire apparaître  $f(x)$  comme somme d'une série alternée).

b) Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$  et préciser  $f'$  sur cet intervalle.

c) En déduire la valeur de  $f(x)$ , pour tout  $x \geq 0$ .

d) En déduire enfin :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

13. Transformation de Laplace : pour tout  $\alpha$  réel, on note  $E_\alpha$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des fonctions à valeurs complexes, continues sur  $\mathbb{R}^+$  et telles que  $t \mapsto f(t) e^{-\alpha t}$  soit bornée sur  $\mathbb{R}^+$ . On pose  $F_\alpha = \bigcap_{\beta > \alpha} E_\beta$ .

a) Montrer que, si  $\alpha < \delta$ , alors  $E_\alpha \subset E_\delta$ . En déduire que  $E_\alpha \subset F_\alpha$ .

Prouver que, si  $f \in F_\alpha$  et si  $p > \alpha$ , alors  $e^{-pt} f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ .

b) Montrer que, à toute fonction  $f$  de  $F_\alpha$ , on peut associer la fonction  $L(f)$  définie sur  $] \alpha, +\infty[$  par

$$L(f)(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt.$$

c) On note  $u : t \mapsto t$  et, pour  $\gamma \in \mathbb{C}$ ,  $e_\gamma : t \mapsto e^{\gamma t}$ ; préciser pour  $u$ ,  $u^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ),  $e_\gamma$  les réels  $\alpha$  pour lesquels cette fonction est élément de  $E_\alpha$ ; déterminer  $L(u)$  et  $L(e_\gamma)$ .

d) Soit  $f \in F_\alpha$ ; montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u^n f : t \mapsto t^n f(t)$  appartient à  $F_\alpha$ .

En déduire que  $L(f)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] \alpha, +\infty[$ , avec :  $\forall r \in \mathbb{N} \quad D^r(L(f)) = (-1)^r L(u^r f)$ .

e) Pour  $r \in \mathbb{N}$ , déterminer  $L(e_\gamma u^r)$ .

f) Soit  $f \in F_\alpha$ , de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^+$  et dont la dérivée  $f'$  appartient à  $F_\alpha$ ; montrer que

$$\forall p > \alpha \quad L(f')(p) = pL(f)(p) - f(0).$$