9. © <u>*Théorème d'Abel*</u> : on suppose que $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est la fonction somme d'une série entière, à coefficients complexes, de rayon de convergence $R > 0$ et que la série numérique $\sum a_n R^n$ converge.

- en posant $b_n = a_n R^n$ je me ramène au cas où $R = 1$, puisque le rayon de convergence de $\sum b_n t^n$ vaut 1 et $\sum b_n 1^n$ converge ; de plus en remplaçant b_0 par $b_0 - \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ (sans toucher aux autres coefficients), je me ramène au cas où $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = 0$, sans modifier l'existence d'une limite pour la fonction somme, puisque je lui ai juste ajouté une constante !
- je reprends alors les notations initiales, $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ avec $R = 1$ et $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0$; je dois montrer que $f(x) \underset{x \to 1^-}{\longrightarrow} 0$; mettons en œuvre la transformation d'Abel : je pose $S_{-1} = 0$, $S_p = \sum_{n=0}^{p} a_n$ et j'écris, pour $x \in]0, 1[$ et $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} (S_n - S_{n-1}) x^n &= \sum_{n=0}^{N} S_n x^n - \sum_{n=0}^{N} S_{n-1} x^n \text{ ((S_n) converge vers 0 donc les deux séries convergent)} \\
&= \sum_{n=0}^{N} S_n x^n - \sum_{n=0}^{N-1} S_n x^{n+1} \text{ car } S_{-1} = 0 \\
&= \sum_{n=0}^{N} S_n x^n - \sum_{n=0}^{N} S_n x^{n+1} + S_N x^{N+1} \\
&= \sum_{n=0}^{N} S_n \left(x^n - x^{n+1}\right) + S_N x^{N+1} \\
&= (1 - x) \sum_{n=0}^{N} S_n x^n + S_N x^{N+1}
\end{aligned}$$

- par définition $S_n - S_{n-1} = a_n$ pour tout n (0 compris puisque $S_{-1} = 0$) ; donc la somme de gauche au point précédent tend vers $f(x)$ quand N tend vers l'infini ; de plus la série $\sum S_n x^n$ converge absolument ((S_n) est bornée et $|x| < 1$) ; enfin $S_N x^{N+1} \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} 0$ (produit de deux suites qui convergent vers 0 !). J'obtiens donc en faisant tendre N vers l'infini

$$f(x) = (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n \text{, cela pour tout } x \text{ de }]0, 1[$$

(cette relation peut aussi s'obtenir par le produit de Cauchy $\frac{1}{1-x} \cdot f(x)$*).*

- la dernière étape est un (superbe) exemple du "style Cesàro" !! Fixons $\varepsilon > 0$. Comme (S_n) converge vers 0, je dispose de n_0 dans $\mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0 \quad |S_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{d'où} \quad \left| \sum_{n=n_0}^{\infty} S_n x^n \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=n_0}^{\infty} x^n \leq \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{1 - x},$$

cela pour tout x de $]0, 1[$; j'ai aussi

$$\left| \sum_{n=0}^{n_0 - 1} S_n x^n \right| \leq \sum_{n=0}^{n_0 - 1} |S_n| \text{, constante que je note } \sigma.$$

J'ai alors (en coupant en deux la somme du point précédent et en simplifiant par $1 - x$ dans le deuxième terme)

$$\forall x \in]0, 1[\quad |f(x)| \leq (1 - x) \sigma + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or bien sûr $(1 - x) \sigma \underset{x \to 1^-}{\longrightarrow} 0$, d'où $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in [1 - \delta, 1[\quad (1 - x) \sigma \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et donc} \quad |f(x)| \leq \varepsilon.$$

En conclusion, par définition de la limite,

$$\boxed{f(x) \text{ tend vers 0 lorsque } x \text{ tend vers 1 par valeurs inférieures.}}$$