2. Pour la convergence simple, je fixe x dans $\mathbb{R}$;

- cas $x = 0$: les $f_n(0)$ valent tous 1, donc la suite $(f_n(0))$ converge vers 1
- cas $x \in \pi\mathbb{Z}^*$: x s'écrit $2^m q\pi$, où $m \in \mathbb{N}$ et q est un entier relatif **impair** ; alors
$$f_{m+1}(x) = \cos\left(q\frac{\pi}{2}\right) = 0$$
et donc les $f_n(x)$ sont tous nuls à partir d'un certain rang, ainsi la suite $(f_n(x))$ converge vers 0
- cas $x \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$: $\sin\dfrac{x}{2^k}$ n'est jamais nul, d'où l'hécatombe
$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \cos\frac{x}{2^k} = \frac{\sin\dfrac{x}{2^{k-1}}}{2\sin\dfrac{x}{2^k}} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad f_n(x) = \frac{\sin x}{2^n \sin\dfrac{x}{2^n}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\sin x}{x}.$$

En conclusion, (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction (continue) $f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$.

Il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}$: en effet, soit $x_n = 2^n\pi$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$; $f_n(x_n) = -1$ tandis que $f(x_n) = 0$; ainsi la suite $\big(f_n(x_n) - f(x_n)\big)$ ne converge pas vers 0, alors que ce serait le cas si (f_n) convergeait uniformément sur $\mathbb{R}$ (ce serait nécessairement vers f !).

Il y a convergence uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}$: fixons $M > 0$; je dispose de n_0 dans $\mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{M}{2^{n_0}} \leq \dfrac{\pi}{2}$; soit alors $n \geq n_0$ et $x \in [-M, M]$:

- cas $x = 0$: $f_n(0) = f(0) = 1$ donc $f_n(0) - f(0) = 0$
- cas $x \in \pi\mathbb{Z}^*$: x s'écrit $2^m q\pi$ avec q impair, où nécessairement $m < n_0$ (car $\dfrac{|x|}{2^{n_0}} < \pi$), d'où $f_n(x) = f(x) = 0$ et $f_n(x) - f(x) = 0$
- cas $x \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$: d'après le calcul précédent
$$f_n(x) - f(x) = \frac{\sin x}{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}} - \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin x}{2^n}\left(\frac{1}{\sin\dfrac{x}{2^n}} - \frac{1}{\dfrac{x}{2^n}}\right).$$

Finalement, en posant (habilement) $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(t) = \dfrac{1}{\sin t} - \dfrac{1}{t}$ pour $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$, j'ai
$$\forall n \geq n_0 \quad \forall x \in [-M, M] \quad f_n(x) - f(x) = \frac{\sin x}{2^n}\varphi\left(\frac{x}{2^n}\right) \quad \text{où} \quad \frac{x}{2^n} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$
Or la fonction φ est continue sur le segment $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$:
$$\forall t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\} \quad \varphi(t) = \frac{t - \sin t}{t\sin t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t}{6} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0.$$
Donc φ est bornée sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, je dispose ainsi de K réel tel que
$$\forall n \geq n_0 \quad \forall x \in [-M, M] \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{K}{2^n}$$
d'où la convergence uniforme de (f_n) vers f sur $[-M, M]$, puisque $\dfrac{K}{2^n}$ est indépendant de x et tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
Cela est établi pour tout $M > 0$, donc

$$\boxed{(f_n) \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur tout segment de } \mathbb{R}.}$$