

T.D. 05 – Suites et séries de fonctions

1. Sur l'intervalle $[0, \pi]$, étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions (f_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n(0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in]0, \pi] \quad f_n(x) = \frac{\sin x}{x(1+nx)}.$$

2. Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions (f_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) = \prod_{k=1}^n \cos \frac{x}{2^k}.$$

3. Soit, pour tout n dans \mathbb{N} , $f_n : x \mapsto e^{-nx} - (1-x)^n$.

a) Montrer la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) sur $[0, 1]$.

b) Montrer la convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$ sur $[0, 1]$ et déterminer sa fonction somme S . Étudier la limite de S en 0^+ . Conclusion ?

4. Étudier, selon la valeur du réel α donné, la convergence simple, uniforme, normale, sur $[0, 1]$, de la série de fonctions $\sum u_n$ où $u_n : t \mapsto n^\alpha t^n (1-t)$.

Déterminer la nature de la série numérique $\sum \int_0^1 u_n$.

5. Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$. Étudier l'ensemble de définition et la continuité de S (on pourra utiliser une comparaison à une intégrale pour déterminer la limite de S en 0^+).

6. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante convergeant vers 0. On fixe $p \in \mathbb{N}^*$ et l'on pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0, 1] \quad f_n(x) = (-1)^n a_n x^{pn}.$$

a) Étudier la convergence normale et la convergence uniforme sur $[0, 1]$ de $\sum f_n$.

b) En déduire une expression de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{pn+1}$ à l'aide d'une intégrale.

7. Soit $x \in]-1, 1[$. Pour θ réel, on pose : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n(\theta) = \frac{x^n \cos n\theta}{n}$ et $f_x(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\theta)$.

Montrer que f_x est définie et dérivable sur \mathbb{R} et calculer sa dérivée.

En déduire la valeur de $\int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 - 2x \cos \theta + x^2) d\theta$.

8. On note $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ où $f_n : x \mapsto (-1)^n \frac{x}{x^2 + n^2}$.

a) Montrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur \mathbb{R}^+ , mais pas normalement. Déterminer $\lim_{+\infty} f$.

b) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+ .

9. On note $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ où $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^{n-1}}{n} e^{-x\sqrt{n}}$.

a) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+ et de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^{+*} .

b) Étudier les variations de f ; donner l'allure de son graphe.