2. Je remarque (habilement) que

$$u_n = \frac{(-1)^n}{4^n(4n+1)} = \frac{(-1)^n}{4^n}\int_0^1 t^{4n}\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\frac{-t^4}{4}\right)^n \mathrm{d}t$$

d'où, pour $p \in \mathbb{N}$, par linéarité de l'intégrale (somme finie !),

$$S_p = \sum_{n=0}^{p} u_n = \int_0^1 \frac{1-\left(\frac{-t^4}{4}\right)^{p+1}}{1+\frac{t^4}{4}}\mathrm{d}t = S - R_p$$

où

$$S = \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{t^4}{4}}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad R_p = \int_0^1 \frac{\left(\frac{-t^4}{4}\right)^{p+1}}{1+\frac{t^4}{4}}\mathrm{d}t.$$

Il vient immédiatement, comme $1 + \dfrac{t^4}{4} \geq 1$,

$$|R_p| \leq \frac{1}{4^{p+1}}\int_0^1 t^{4p+4}\mathrm{d}t = \frac{1}{4^{p+1}} \cdot \frac{1}{4p+5} \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par conséquent, $\sum u_n$ converge et

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+\frac{t^4}{4}} = \sqrt{2}\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}.}$$

cela grâce au changement de variable $t = \sqrt{2}x$. Il reste à calculer cette dernière intégrale…
Je commence par factoriser le dénominateur :

$$1 + x^4 = \left(1+x^2\right)^2 - 2x^2 = \left(1 + x^2 - x\sqrt{2}\right)\left(1 + x^2 + x\sqrt{2}\right)$$

et je sais alors (hors programme…) qu'il existe une (unique…) décomposition de la forme :

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{ax+b}{1+x^2-x\sqrt{2}} + \frac{cx+d}{1+x^2+x\sqrt{2}}.$$

En identifiant j'obtiens successivement

$$a + c = 0,\ b + d = 1,\ 2a\sqrt{2} + 1 = 0,\ b = d$$

et finalement

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{-x+\sqrt{2}}{1+x^2-x\sqrt{2}} + \frac{x+\sqrt{2}}{1+x^2+x\sqrt{2}}\right).$$

Chaque terme donne un ln et un arctan :

$$\frac{-x+\sqrt{2}}{1+x^2-x\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2x-\sqrt{2}-\sqrt{2}}{1+x^2-x\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\left(x-1/\sqrt{2}\right)^2+\left(1/\sqrt{2}\right)^2}$$

d'où

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{-x+\sqrt{2}}{1+x^2-x\sqrt{2}}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2-x\sqrt{2}\right)\right]_0^{1/\sqrt{2}} + \left[\arctan\left(x\sqrt{2}-1\right)\right]_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4}$$

et de même

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x+\sqrt{2}}{1+x^2+x\sqrt{2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{2} + \arctan 2 - \frac{\pi}{4}$$

d'où finalement

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \frac{\ln 5}{4} + \frac{\arctan 2}{2} \approx 0.95593.}$$

4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante qui converge vers 0. Montrer que les séries de termes généraux u_n et $v_n = n\,(u_n - u_{n+1})$ sont de même nature. En cas de convergence, comparer leurs sommes.

<u>*Solution*</u> : pour p dans $\mathbb{N}^*$, notons $U_p = \sum_{n=1}^{p} u_n$ et $V_p = \sum_{n=1}^{p} v_n$ ($v_0 = 0$!).
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs positive ; de plus $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, elle est donc également à valeurs positives.

Grâce à une réindexation, j'ai

$$V_p = \sum_{n=1}^{p} nu_n - \sum_{n=1}^{p+1} (n-1)\,u_n = U_p - pu_{p+1} \leq U_p.$$

Par conséquent, si $\sum u_n$ converge, alors (U_p) est bornée, donc (V_p) est également bornée ; comme elle est croissante elle converge. Ainsi $\sum v_n$ converge. De plus, d'après la relation précédente, la suite (pu_{p+1}) converge également. Soit ℓ sa limite ; si ℓ était non nulle, j'aurais $u_{p+1} \sim \ell/p$ et $\sum u_n$ divergerait (par comparaison avec la série harmonique). Ainsi $\ell = 0$ d'où par passage à la limite

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Réciproquement, je suppose que $\sum v_n$ converge ; notons V sa somme.

Soit $\varepsilon > 0$; je dispose de $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall k \geq n_0 \quad |V - V_k| \leq \varepsilon/2 \quad \text{d'où} \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad V_{n+k} - V_n \leq \varepsilon.$$

Autrement dit, d'après la relation précédente,

$$U_{n+k} - U_n - (n+k)\,u_{n+k+1} + nu_{n+1} \leq \varepsilon.$$

Or $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, donc

$$U_{n+k} - U_n \geq ku_{n+k} \geq ku_{n+k+1}$$

d'où

$$n\,(u_{n+1} - u_{n+k+1}) \leq \varepsilon,$$

cela pour tout k dans $\mathbb{N}$; or $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, d'où à la limite quand k tend vers l'infini

$$nu_{n+1} \leq \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, j'ai trouvé n_0 tel que $0 \leq nu_{n+1} \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$.
Par définition de la limite, (nu_{n+1}) converge vers 0.

Comme $U_p = V_p + pu_{p+1}$, j'en déduis que

$$\sum u_n \text{ converge et } \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$