

## T.D. 03 – Compléments sur les séries numériques

1. Étudier la nature des séries dont le terme général est donné ci-dessous, en discutant éventuellement suivant les valeurs des paramètres :

$$u_n = \arccos\left(\frac{n^3 + 1}{n^3 + 2}\right) \quad ; \quad u_n = \sqrt[3]{n^3 + an} - \sqrt{n^2 + 3} \quad (a \in \mathbb{R})$$

$$u_n = \left(\frac{4}{\pi} \arctan \frac{n}{n+1}\right)^{n^\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \quad ; \quad u_n = \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$$

$$u_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}} \quad ; \quad u_n = \sin\left(2\pi\sqrt{n^2 + (-1)^n}\right)$$

$$u_n = \sin\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \frac{k}{n^{5\alpha}}\right) \quad (\alpha > 0 ; k \neq 0) \quad ; \quad u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} \ln(n + (-1)^n)}$$

2. Calculer les sommes des séries dont le terme général est donné ci-dessous, en montrant leur convergence.

$$u_n = (n - (-1)^n) \cdot 3^{-n} \quad ; \quad u_n = (-1)^n \int_0^1 t^n f(t) dt \quad (f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}^+))$$

$$u_n = \left(\sum_{k=1}^n k^2\right)^{-1} \quad ; \quad u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$$

$$u_n = \frac{\sin \frac{1}{n(n+1)}}{\cos \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n+1}} \quad ; \quad u_n = \frac{(-1)^n}{4^n (4n+1)} \quad \left(\text{se ramener à } \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dx}{1+x^4}\right)$$

3. Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels positifs ou nuls,  $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par récurrence par  $u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n}$ . Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge si et seulement si la série  $\sum a_n$  converge.

4. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle décroissante qui converge vers 0. Montrer que les séries de termes généraux  $u_n$  et  $v_n = n(u_n - u_{n+1})$  sont de même nature.

En cas de convergence, comparer leurs sommes.

5.  $\alpha > 0$  étant donné, étudier la suite  $(P_n)$  définie par :  $\forall n \geq 2 \quad P_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^\alpha}\right)$ .

6. © Soit  $\sum x_n$  une série à termes dans  $\mathbb{R}^{+*}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $\sum v_n$  une série absolument convergente vérifiant

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + v_n.$$

Montrer qu'il existe  $K \in \mathbb{R}^{+*}$  tel que  $x_n \sim \frac{K}{n^\alpha}$ .

(On pourra étudier la série de terme général  $a_{n+1} - a_n$ , où  $a_n = \ln(n^\alpha x_n)$ .)

Étudier les exemples :

$$x_n = n^{-n} n! e^n \quad \text{et} \quad x_n = \frac{n \cdot n!}{(a+1) \dots (a+n)} \quad (a > 0).$$

7. © Test de condensation de Cauchy : soit  $(u_n)$  une suite de réels positifs, décroissante.

Montrer que les séries  $\sum u_n$  et  $\sum 2^n u_{2^n}$  sont de même nature.

Que donne le résultat précédent pour les séries de Riemann ?

Et pour les séries de Bertrand de la forme  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n (\ln n)^\beta}$  ?