

T.D. 02 – Réduction des endomorphismes, des matrices carrées

1. Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ admettant un polynôme annulateur P de valuation 1. Montrer que $E = \text{Ker } u \oplus \text{Im } u$.
2. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, F, G deux sous-espaces supplémentaires de E et p, q les projecteurs associés. Montrer que, pour $u \in \mathcal{L}(E)$ fixé, les trois assertions suivantes sont équivalentes :
 - (a) u commute avec p ;
 - (b) u commute avec q ;
 - (c) F et G sont stables par u .
3. Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension 3, $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = u^3$ et $\dim \text{Ker}(u - I_E) = 1$.
Montrer qu'il existe une base de E où u admet pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
4. © Soient u et v deux endomorphismes d'un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Montrer que $u \circ v$ et $v \circ u$ ont les mêmes valeurs propres. Ce résultat subsiste-t-il en dimension infinie ?
5. © Pour les propriétés suivantes, donner deux démonstrations : l'une faisant appel au théorème de CAYLEY-HAMILTON, l'autre pas.
 - a) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente, alors $A^n = 0$.
 - b) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, alors A^{-1} est un polynôme en A .
6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I$. Montrer que : $\det A > 0$.
7. Soit n dans \mathbb{N}^* . Montrer qu'il existe A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^2 - 2A + 4I = 0$.
Montrer qu'il existe A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 - 2A + 4I = 0$ si et seulement si n est pair. Si c'est le cas, exprimer A^p comme combinaison linéaire de A et de I .
8. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
Montrer qu'il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda, \mu) \in \mathbb{C}^4$ tel que A soit semblable à $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ où à $\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.
Montrer que deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, non proportionnelles à l'identité, sont semblables si et seulement si elles ont le même polynôme caractéristique.
Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice symétrique.
9. Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que u^2 soit diagonalisable. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si $\text{Ker } u = \text{Ker } u^2$.
10. a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, sans racine réelle, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $A.P(A) = 0$.
Montrer que le rang de A est pair.
b) Résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation d'inconnue $M : M^3 + M = 0$.
11. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant n valeurs propres distinctes deux à deux. Montrer que, si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie $B^2 = A$, alors B est diagonalisable. En déduire toutes les matrices B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $B^2 = A$.
12. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle que : $\exists n \in \mathbb{N}^* \quad M^n = I$. Montrer que $M^{12} = I$.
13. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable sur \mathbb{R} ? sur \mathbb{C} ? (a réel donné.)

14. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ -1 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Pour λ réel, calculer $M = (\lambda I - A)^{-1}$ quand elle existe.

Montrer que $M = \sum_{k=1}^3 \frac{1}{\lambda - \lambda_k} P_k$ où les λ_k sont les valeurs propres de A et les P_k des matrices à préciser.

Calculer $\sum_{k=1}^3 P_k$.

15. Diagonaliser la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, puis calculer M^n .

Déterminer les sous-espaces de \mathbb{R}^3 stables par $u = \text{Can } M$ et les matrices qui commutent avec M .

16. Résoudre l'équation $B^2 = \begin{pmatrix} 8 & -8 & 28 \\ 6 & -8 & 24 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ d'inconnue $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

17. Trigonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$, en déduire les puissances de A .

18. Trigonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 2 \\ -15 & -9 & 11 \\ -14 & -6 & 8 \end{pmatrix}$. Quels sont les sous-espaces stables par A ?