T.D. 00 – Synchronisation et mise en route

1. © <u>*Combinaisons avec répétitions*</u> : étant donné un ensemble E de cardinal n et un entier naturel p, on connaît le nombre A_n^p d'*arrangements* p à p (ou *p-listes*) d'éléments distincts de E (dans une liste, l'ordre a de l'importance…) et $\binom{n}{p}$ le nombre de *combinaisons* p à p d'éléments de E (éléments distincts mais sans tenir compte de l'ordre ; c'est aussi le nombre de parties de cardinal p de E, jadis noté C_n^p).

$$\text{Si}\quad 0 \leq p \leq n,\quad A_n^p = n\,(n-1)\ldots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!},\ \text{sinon } A_n^p = 0 \quad \text{et} \quad \binom{n}{p} = C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}.$$

Le but de l'exercice est de déterminer le nombre Γ_n^p de combinaisons p à p d'éléments de E **avec répétitions éventuelles**. Par exemple, le nombre de pièces dans un jeu de dominos est Γ_7^2.

a) Pour n et p dans $\mathbb{N}^*$, établir : $\Gamma_n^p = \Gamma_{n-1}^p + \Gamma_n^{p-1}$.

b) En déduire : $\forall\,(n,p) \in \mathbb{N}^{*2} \quad \Gamma_n^p = \binom{n+p-1}{p}$ *(on pourra procéder par récurrence sur $n+p$, en donnant un sens précis à cette idée…).*

2. Soient E, F deux ensembles et f une application de E dans F.
Montrer que f est injective si et seulement si : $\forall\,(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2 \quad f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

3. a) Soit $(G,\cdot)$ un groupe et H un sous-groupe de G. Montrer que la relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur G par : $\forall\,(x,y) \in G^2 \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^{-1}y \in H$ est une relation d'équivalence sur G. Décrire la classe d'équivalence d'un élément x de G. En déduire qu'elle est équipotente à H (*i.e.* en bijection avec H).

b) Dans un groupe **fini** $(G,\cdot)$, établir les propriétés suivantes :

* le cardinal de tout sous-groupe de G est un diviseur de $|G|$ (*théorème de Lagrange*) ;
* pour tout x élément d'un groupe fini de cardinal n, x^n est l'élément neutre.

4. © Soient deux sous-groupes H_1 et H_2 d'un groupe $(G,\cdot)$.
Montrer que $H_1 \cup H_2$ est encore un sous-groupe de G si et seulement si $H_1 \subset H_2$ ou $H_2 \subset H_1$.

5. Soient a,b éléments d'un groupe G d'élément neutre e. Montrer que, si $(ab)^n = e$, alors $(ba)^n = e$.

6. © <u>*Éléments nilpotents d'un anneau*</u> : soit $(A,+,\times)$ un anneau ; un élément x de A est dit *nilpotent* si et seulement s'il existe k dans $\mathbb{N}$ tel que $x^k = 0$.

a) Montrer que, si x est nilpotent, alors $1-x$ est inversible et préciser son inverse.

b) Soient a et b des éléments de A, montrer que si ab est nilpotent, alors ba est nilpotent.
Montrer que si a et b sont nilpotents et commutent, alors $a+b$ est nilpotent.

7. Résoudre l'équation $\sin x = \sqrt{2}$.

8. Soient a,b,c trois nombres complexes. Montrer que les points d'affixes a,b,c forment un triangle équilatéral si et seulement si : $a^2+b^2+c^2 = bc+ca+ab$.

9. Pour quelles valeurs de n le polynôme $(X+1)^n - X^n - 1$ possède-t-il une racine multiple dans $\mathbb{C}$?

10. Soient n dans $\mathbb{N}$, $n \geq 2$ et $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de 1.
Montrer que, pour tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$, il existe P_n dans $\mathbb{C}[X]$ tel que

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} P(\omega X) = P_n(X^n).$$

11. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Développer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\left(z - e^{2ik\pi/n}\right)$. En déduire que : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\,\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$.

12. Soit A un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad A(x) \geq 0$.
Montrer qu'il existe B et C dans $\mathbb{R}[X]$ tels que : $A = B^2 + C^2$.