Préparation des oraux – probabilités

1. *(ENS)* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ étant un espace probabilisé, montrer que

$$\forall (A,B) \in \mathcal{A}^2 \quad |P(A\cap B) - P(A)P(B)| \leq \frac{1}{4}.$$

Étudier le cas d'égalité.

2. *(Mines)* Une urne contient n boules numérotées de 1 à n, que l'on tire sans remise ; quelle est la probabilité que la boule 1 soit tirée au k-ième tirage ?

On suppose que, sur les n boules, m sont blanches et les autres rouges ; quelle est la probabilité qu'une boule blanche apparaisse au k-ième tirage ?

3. *(Mines)* Une urne est remplie de $2n$ boules numérotées de 1 à $2n$. On tire les boules une à une et sans remise.

a) Calculer la probabilité que les boules $1, 3, \ldots, 2n-1$ soient sorties dans cet ordre et consécutivement.

b) Calculer la probabilité que les boules $1, 3, \ldots, 2n-1$ soient sorties dans cet ordre, pas forcément consécutivement.

c) On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de tirages nécessaires à la sortie de toutes les boules de numéro impair. Calculer $E(X)$.

4. *(Mines)* Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On pioche une poignées de jetons et l'on admet que chaque poignée (y compris la poignée vide) a la même probabilité d'être tirée.

Calculer l'espérance de la variable aléatoire S donnant la somme des numéros des jetons tirés.

5. *(Mines)* Une usine comporte deux chaînes de production : A, qui produit 60% des objets, et B le reste. Un objet issu de A a une probabilité $0,1$ d'être défectueux, probabilité qui vaut $0,2$ si l'objet provient de B.

a) Donner la probabilité pour qu'un objet choisi au hasard soit défectueux.

b) Donner la probabilité pour qu'un objet constaté défectueux provienne de A.

c) On suppose que le nombre d'objets Y_A produit par A en une heure suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$. Donner la loi du nombre X_A d'objets défectueux produits par A en une heure.

d) Calculer l'espérance et la variance d'une loi de Poisson.

6. *(Mines)* Deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant que $X+Y=n$.

7. *(Mines)* Deux variables aléatoires indépendantes X et Y sur un même espace suivent la même loi géométrique de paramètre p. Donner la loi de $|X-Y|$.

On note $T = \max(X,Y)$ et $U = \min(X,Y)$; exprimer $T+U$, $T-U$ et TU en fonction de X et Y. Donner $\operatorname{Cov}(T,U)$. Donner la loi de U, l'espérance et la variance de U.

8. *(Centrale)* Un étang contient N poissons dont n brochets. Un pêcheur sort des poissons un par un en relâchant à chaque fois sa prise. La pêche s'arrête lorsque tous les brochets ont mordu.

Quelle est la probabilité que la pêche s'arrête après n prises ? Après $n+1$ prises ?

Quel est le nombre moyen de prises jusqu'à l'arrêt de la pêche ?

9. *(Mines)* On doit joindre n personnes, chacune ayant la probabilité $p \in]0,1[$ de répondre à chaque appel. La variable aléatoire X_1 représente le nombre de personnes ayant répondu au 1^er appel, X_2 le nombre de personnes n'ayant pas répondu au premier mais ayant répondu au second. X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

Déterminer les lois de X_1 et de X_2.

On continue les appels jusqu'à ce que toutes les personnes aient répondu. Supposant les personnes numérotées de 1 à n, donner la loi de Y_k représentant le rang de l'appel auquel la personne k a répondu.

10. *(Mines)* On lance une pièce avec la probabilité $p \in]0,1[$ de faire Pile et l'on note N le rang d'apparition du premier Pile. Si l'on obtient Pile pour la première fois au n-ième lancer, on lance à nouveau n fois la pièce et l'on note X le nombre de Pile obtenus au cours de ces n lancers. Déterminer la loi de X.

11. *(X)* Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles discrètes sur un même espace probabilisé, admettant toutes une variance. Montrer que la matrice $A = \left(\operatorname{Cov}(X_i, X_j)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est diagonalisable et a ses valeurs propres dans $\mathbb{R}^+$.

12. *(CCP)* Deux variables aléatoires X et Y suivent des lois de Bernoulli de paramètres respectifs p et q. La covariance de X et Y est nulle. Montrer que $P(X = 1, Y = 1) = P(X = 1)P(Y = 1)$ puis que X et Y sont indépendantes.

13. *(Mines)* Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et G_X sa fonction génératrice. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall r \in]0,1[\quad P(X \geq n) \leq \frac{1 - G_X(r)}{1 - r^n}.$$

Étudier les cas d'égalité.

14. *(Mines)* Écrire le développement en série entière de $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

À quelle condition sur r peut-on définir une variable aléatoire X telle que

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad P(X = n) = \frac{(2n)!r}{2^{3n}(n!)^2} \ ?$$

Montrer que, quand cette condition est réalisée, X admet une espérance et une variance et les calculer.