Préparation des oraux – analyse

1. *(Télécom Sud Paris)* Montrer que $P_n(x) = x^n - nx + 1$ admet une unique solution a_n dans $[0,1]$. Calculer la limite de a_n et en donner un équivalent.

2. *(X-ENS)* Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. On pose $\mathcal{T} = \{(x,y) \in I^2 \ / \ x < y\}$. Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2) dans $\mathcal{T}$ et $u : t \mapsto (1-t)\,x_1 + tx_2$, $v : t \mapsto (1-t)\,y_1 + ty_2$. Montrer que $\big(u(t), v(t)\big) \in \mathcal{T}$ pour tout t de $[0,1]$.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et injective. Montrer que que f est strictement monotone.

Soit f dérivable sur I et $(a,b) \in \mathcal{T}$ tel que $f'(a)\,f'(b) < 0$. Montrer que : $\exists c \in \,]a,b[\quad f'(c) = 0$. Quel théorème en déduit-on ?

Déterminer les fonctions f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, ne s'annulant pas et telles que $|f''| = f$.

3. *(CCP)* Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad x^{2n} - 1 = \left(x^2 - 1\right) \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \left(x^2 - 2x\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right)$.

En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln\left(a^2 - 2a\cos\theta + 1\right) \mathrm{d}\theta$, pour $|a| \neq 1$.

4. *(Centrale)* Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k\,(n+k)}}$.

5. *(Mines)* Nature des séries de terme général :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^{3/2} - n^{1/2}} \ ; \ v_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \ ; \ w_n = \sin \pi\sqrt{n^2+1} \ ; \ x_n = (-1)^n\, n^{1/n} \sin\frac{1}{n}.$$

6. *(CCP)* En utilisant la série exponentielle, déterminer un entier N_n et un réel Γ_n, dont on donnera un encadrement, vérifiant $\sqrt{e}\,2^{n-1}n! = 2N_n + n + \dfrac{1}{2} + \Gamma_n$. Nature de la série $\sum \cos\left(\pi\sqrt{e}\,2^{n-1}n!\right)$?

7. *(X-ENS)* On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telles que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, X_n prend ses valeurs dans $\left\{0, \dfrac{1}{n}, \dots, \dfrac{n-1}{n}\right\}$ et vérifie :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!] \quad P\left(X_n = \frac{k}{n}\right) = \alpha_n \left(e^{k/n} - 1\right)$$

où α_n est un réel que l'on précisera. Donner un équivalent de α_n quand n tend vers l'infini.

Pour $n \geq 2$, on note F_n la fonction de répartition de X_n. Calculer $F_n(x)$ pour tout réel x.

Montrer que (F_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f continue dont on donnera l'expression.

Montrer que (F_n) converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

On pourra démontrer puis utiliser *le second théorème de Dini* : si une suite de fonctions croissantes converge simplement sur un segment $[a,b]$ vers une fonction continue, alors la convergence est uniforme *(pour $\varepsilon > 0$ fixé, penser à utiliser une subdivision bien choisie de $[a,b]$)*.

8. *(X-ENS)* Montrer que l'ensemble des fonctions lipschitziennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que $F = \{f \in E \ / \ f(0) = 0\}$ est un sous-espace de E ; donner un supplémentaire de F dans E.

Soit $t \in \,]0,1[$ et ϕ qui à $f \in F$ associe $g : x \longmapsto f(x) - f(tx)$. Montrer que ϕ est un endomorphisme de F ; est-il injectif ?

On veut montrer que c'est un isomorphisme. Pour $g \in F$, on suppose qu'il existe $f \in F$ telle que $g = \phi(f)$. Exprimer $\sum\limits_{k=0}^{n-1} g\left(t^k x\right)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et conclure.

Déterminer toutes les fonctions f de F vérifiant : $f(x) - 2f(tx) + f\left(t^2x\right) = x$.

9. *(CCP)* Nature de la série de terme général $\dfrac{1}{n^{\alpha}} \displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^7}}$?

10. *(Centrale)* Montrer que : $\forall \alpha \in \,]0,1[\quad \exists C \in \mathbb{R} \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to\infty}{=} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} + C + o(1)$.

11. *(CCP)* Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{+\infty} f = \ell$. Montrer que $e^{-x}\displaystyle\int_0^x e^t f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

12. *(Centrale)* Déterminer les ensembles de définition respectifs $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$ de

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1} \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n^2+1}.$$

Montrer que f est continue sur $\mathcal{D}_f$ et que g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}_g$.

13. *(Centrale)* Nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left[(x+1) - b\sqrt{x^2+2x+2} - \frac{a}{x}\right]\mathrm{d}x$? Discuter selon (a,b).

14. *(ENSEA)* Existence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2}\mathrm{d}t$. Calculer $\lim\limits_{a\to0}\displaystyle\int_a^{3a} \frac{\sin t}{t^2}\mathrm{d}t$. En déduire la valeur de I.

15. *(CCP)* $f : x \mapsto \dfrac{(-1)^{E(1/x)}}{x}$ est-elle intégrable sur $]0,1]$? Existence et valeur de $\displaystyle\int_0^1 f$.

16. *(X-ENS)* Soit $f : [1,+\infty[\,\to \mathbb{R}^{+*}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{f'}{f} = p \in \mathbb{R}^{+*}$.

On pose $a_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sum a_n$ diverge et que $a_n \sim \dfrac{e^p - 1}{p} f(n)$.

En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) \sim \frac{p}{e^p-1}\int_1^{n+1} f$. Donner un équivalent simple de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k \ln k$.

17. *(CCP)* Soit $x \in \,]0,1[$, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + xe^{-t}\right)\mathrm{d}t$ existe. Transformer cette intégrale en série.

18. *(X-ENS)* On considère les deux espaces $E = \left\{f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{C}) \;/\; f(0) = f(1) = 0\right\}$ et $F = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{C})$, munis de la norme N_∞ de la convergence uniforme sur $[0,1]$.

Montrer que $\phi : f \mapsto f''$ est un isomorphisme de E dans F.

Soit $g \in F$; montrer que $G : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 |x-t|\,g(t)\,\mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ et calculer G''.

En déduire une application $k : [0,1]^2 \to \mathbb{C}$ telle que : $\forall g \in F \quad \forall x \in [0,1] \quad \phi^{-1}(g)(x) = \displaystyle\int_0^1 k(x,t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$.

Existence et calcul de $\sup\limits_{N_\infty(g)\le1} N_\infty\left(\phi^{-1}(g)\right)$.

19. *(CCP)* Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^x}\mathrm{d}t$. Montrer que f est dérivable, convexe, sur I. Déterminer $\lim\limits_{1^+} f$, $\lim\limits_{+\infty} f$.

20. *(TPE)* Soit $F(\alpha) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^{+*}} \frac{1-\cos\alpha t}{t^2}e^{-t}\mathrm{d}t$. Existence de $F(\alpha)$, montrer que F est $\mathcal{C}^2$, calculer F.

21. *(CCP)* Ensemble de définition de $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{e^t-1}\mathrm{d}t$. Calculer sa limite en $+\infty$.

Pour $x > 0$, calculer $f(x-1) - f(x)$ et en déduire une expression de f comme somme d'une série de fonctions. Quelle autre méthode aurait-on pu utiliser ?

22. *(Centrale)* Rayon de convergence et somme des séries entières $\sum u_n \frac{x^n}{n!}$ et $\sum v_n \frac{x^n}{n!}$ où les deux suites numériques (u_n) et (v_n) sont définies par la donnée de u_0, v_0 et les relations : $\forall n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$.

23. *(CCP)* Rayon de convergence R et calcul de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 3^n} \cdot x^n$. Nature de la série en $\pm R$?

24. *(ENSAM)* Déterminer les fonctions f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 3 \arctan x + x^2 f(x) = 2x \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

25. *(CCP)* Résoudre $y'' - 3y' + 2y = \sqrt{1 + e^{-x}}$.

26. *(X-ENS)* Intégrer $\left(x^2 - 2x\right) y'' + 6(x-1) y' + 6y = 0$, avec $y(1) = 0$ et $y'(1) = 1$.

27. *(CCP)* Donner une série entière solution de : $x^2 y'' + (3x - 1) y' + y = \frac{1}{(1-x)^2}$.

28. *(Mines)* Intégrer $xy'' - y' + 4x^3 y = 0$ à l'aide du changement de variable $x^2 = t$.

29. *(Centrale)* Existe-t-il des solutions $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ de $y' + 2\sqrt{y} = 0$?

30. *(X-ENS)* Soit g une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.
Montrer que, si y est une solution bornée de (E) $y'' + gy = 0$, alors $y'(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
Montrer que, si y_1 et y_2 sont deux solutions bornées de (E), alors $y_1 y_2' - y_1' y_2 = 0$.
En déduire que (E) admet des solutions non bornées.

31. *(X-ENS)* Soient a, b deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et (E) $y'' + ay' + by = 0$.
a) Si y est une solution non nulle de (E) s'annulant en x_0, montrer que :

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in \left]x_0 - \delta, x_0 + \delta\right[\setminus \{x_0\} \quad y(x) \neq 0.$$

b) Si (y_1, y_2) est un système fondamental de solutions de (E), montrer qu'entre deux zéros successifs de y_1, il existe un unique zéro de y_2.

32. *(CCP)* Sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$, $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{x}$. Trouver f à l'aide du changement de variables $u = x$ et $v = \frac{y}{x}$.

33. *(Centrale)* Trouver M et N sur l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ tels que le triangle SMN (où $S = (a, 0)$) ait une aire maximale. Calculer cette aire.

34. *(Centrale)* Pour θ réel fixé, déterminer les valeurs de $p(\theta)$ pour lesquelles la droite D_θ d'équation $x \cos\theta + y \sin\theta = p(\theta)$ est tangente à l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
En déduire l'aire maximale d'un rectangle circonscrit à $\mathcal{E}$.

35. *(CCP)* Soient a, b réels non nuls ; on considère l'arc paramétré défini par

$$x(t) = 2t + \frac{a^3}{t^2} \ ; \quad y(t) = t^2 + \frac{2b^3}{t}.$$

Condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait un point de rebroussement ? Un point double ?

36. Soit $\mathcal{C}$ la courbe de $\mathbb{R}^2$ d'équation cartésienne $e^{x-y} = 1 + 2x + y$. Montrer que le point $O = (0, 0)$ est un point régulier de $\mathcal{C}$. Déterminer la tangente $\mathcal{T}$ en O à $\mathcal{C}$ ainsi que la position de $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{T}$.

37. Soit $\mathcal{S}$ la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Déterminer les plans tangents à $\mathcal{S}$ contenant la droite $\mathcal{D}$ d'équations cartésiennes $\begin{cases} x = 1 \\ y = z + 2 \end{cases}$.