Préparation des oraux – algèbre

1. *(CCP)* Résoudre $1+2z+2z^2+\cdots+2z^{n-1}+z^n=0$.
En déduire une factorisation de $1+2X+2X^2+\cdots+2X^{n-1}+X^n$.

2. *(Mines)* Soit $n \geq 1$; montrer qu'il existe un unique polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ tel que :
$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin(2n+1)x = \sin x \cdot P\left(\sin^2 x\right)$; donner le degré et le coefficient dominant de P.
En déduire que : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{2n+1} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$.

3. *(CCP)* Soient A et B les restes respectifs de la division euclidienne d'un polynôme P par $X-a$ et $X-b$. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$.

4. *(X-ENS)* Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, f, g dans $\mathcal{L}(E)$. Montrer que :
a) $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} g \Leftrightarrow \exists h \in \mathcal{L}(E) \quad f = g \circ h$;
b) si $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$, alors $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} g$.

5. *(Mines)* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, définie par $a_{i,j} = 1 - \delta_{i,j}$. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

6. *(Centrale)* Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{rg} M^n = \operatorname{rg} M^{n+1}$.

7. *(CCP)* Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Exprimer le polynôme caractéristique de A^{-1} en fonction de celui de A.

8. *(X-ENS)* Soient $E = \mathcal{M}_n(K)$ et $A \in E$ donnée. Soit φ l'endomorphisme de E qui à M associe AM. Déterminer le rang de φ et montrer que φ est diagonalisable si et seulement si A l'est.

9. *(CCP)* Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$, diagonalisable et P le polynôme caractéristique de u. Montrer que $P(u) = 0$.

10. *(Mines)* Soit G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{C})$. Montrer que toute matrice de G est diagonalisable.

11. *(CCP)* Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, u_1, u_2, u_3 dans $\mathcal{L}(E)$ tels que
$u_1 + u_2 + u_3 = \mathrm{I}_E \quad$ et $\quad u_i \circ u_j = 0$ pour $i \neq j$.
a) Préciser la nature de u_1, u_2, u_3.
b) Soit $f = u_1 + u_2 - 2u_3$; quelle relation simple existe-t-il entre les valeurs propres de f et celles de u_3 ? f est-il diagonalisable ? Trouver ses éléments propres. f est-il inversible ?

12. *(Centrale)* Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\varphi : g \mapsto f \circ g - g \circ f$.
a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ et calculer ses puissances.
b) On suppose f nilpotent d'ordre k, montrer que φ est nilpotent.
c) On suppose $f = ap + bq$ où a, b sont des scalaires distincts et p, q des projecteurs associés. Montrer que f est diagonalisable et exprimer ses éléments propres. Chercher les éléments propres de φ ; est-il diagonalisable ?

13. *(CCP)* Déterminer valeurs propres et vecteurs propres de $M = \begin{pmatrix} 0 & c & b & a \\ a & 0 & c & b \\ b & a & 0 & c \\ c & b & a & 0 \end{pmatrix}$.

14. *(CCP)* Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -5 & 3 & 0 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ et M dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 - 3M = A$. Montrer que $AM = MA$.

Résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation $M^2 - 3M = A$.

15. *(Centrale)* Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Déterminer $\operatorname{Ker} A^2$, $\operatorname{Ker}(A-2I)^2$, montrer qu'ils sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.
Montrer que $A^2(A-2I)^2 = 0$. Montrer que A est semblable à B.

16. *(CCP)* $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$?

17. *(Mines)* À quelle condition $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

18. *(Mines)* Trouver les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par $\begin{pmatrix} -1 & k & -k \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

19. *(CCP)* Soit une matrice M de $O(n)$, de coefficient courant $a_{i,j}$. Montrer que : $\sum\limits_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}| \leq n\sqrt{n}$.

Pour $n = 2$, donner l'expression des matrices qui vérifient l'égalité.

20. *(Mines)* Soit A une matrice colonne réelle à n lignes. Montrer que : $\det\left(I_n + A\,{}^tA\right) = 1 + {}^tAA$.

21. *(ENSIETA)* Dans E espace vectoriel euclidien de dimension n, $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille de vecteurs tels que : $\forall x \in E \quad \|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} (x|e_k)^2$. Montrer que $(e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormale de E.

22. *(CCP)* Soit A matrice symétrique réelle telle que $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que $A = 0$.

23. *(Mines)* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que les valeurs propres de ${}^tA - A$ sont réelles. Montrer que A est symétrique.

24. *(Centrale)* Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien, matrice de la rotation d'angle $\pi/2$ autour de l'axe dirigé par (a, b, c) ?

25. *(CCP)* Montrer que l'endomorphisme u de matrice $A = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 \\ -6 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ est une rotation de $\mathbb{R}^3$.

Préciser ses éléments caractéristiques.

26. *(Centrale)* Donner des conditions sur a, b, c pour que la matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ soit définie positive.

27. *(X-ENS)* Lorsque C est un convexe d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, on dit que $a \in C$ est *un point extrémal de* C si et seulement si $C \setminus \{a\}$ est encore convexe.

a) Quels sont les points extrémaux de la boule unité fermée de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme N_1 ?

b) Montrer qu'un point de C est extrémal si et seulement s'il n'est pas le milieu de deux points distincts de C.

On suppose dorénavant que E est un espace euclidien, la norme euclidienne est notée $\|\cdot\|$.

c) On note B la boule unité fermée. Quels sont ses points extrémaux ?

d) Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, on note $N(f) = \sup\limits_{u\in B} \|f(u)\|$ et $C = \left\{f \in \mathcal{L}(E) \ / \ N(f) \leq 1\right\}$.

Montrer que C est convexe et que ses points extrémaux sont les automorphismes orthogonaux de E.

On admettra l'existence d'une *décomposition polaire* : toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire $A = \Omega S$ avec $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (matrice symétrique positive).