T.D. 12 – Calcul différentiel – Courbes et surfaces

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(0,0) = 0 \quad \text{et} \quad f(x,y) = \frac{xy\left(x^2 - y^2\right)}{x^2 + y^2}.$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. Conclusion ?

2. Soit f l'application de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui à M associe M^{-1}.
Montrer que f est différentiable en tout point A de $GL_n(\mathbb{R})$, avec : $\mathrm{d}f(A) : H \mapsto -A^{-1}HA^{-1}$.

3. © <u>*Théorème d'Euler*</u> : soit C un *cône ouvert de sommet* O dans E (*i.e.* un ouvert de E tel que *:* $\forall u \in C \quad \forall t \in \mathbb{R}^{+*} \quad t.u \in C$). Une application f de C dans $\mathbb{R}$ est dite *homogène de degré* α *sur* C ($\alpha \in \mathbb{R}$ donné) si et seulement si :

$$\forall u \in C \quad \forall t \in \mathbb{R}^{+*} \quad f(t.u) = t^\alpha.f(u).$$

Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur C. Montrer que f est homogène de degré α sur C si et seulement si :

$$\forall u \in C \quad \mathrm{d}f(u) \cdot u = \alpha.f(u).$$

4. Trouver les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad x \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x^4 + y^4}.$$

(On pourra utiliser le théorème d'Euler !)

5. Trouver les solutions de $y\dfrac{\partial f}{\partial x} - x\dfrac{\partial f}{\partial y} = \left(x^2 + y^2\right)xy$ de la forme $(x,y) \mapsto \varphi(x) + \psi(y)$, où φ et ψ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

6. Résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes, en utilisant le changement de variables indiqué (f fonction inconnue de deux variables réelles) :

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} + 3(x-y)f(x,y) = 0 \quad (u = x - y,\ v = x + y)$

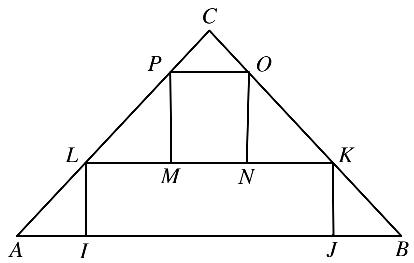
b) $x\dfrac{\partial f}{\partial y} - y\dfrac{\partial f}{\partial x} = k.f \quad$ (coordonnées polaires)

7. Déterminer le maximum de $f : (x,y) \mapsto \dfrac{x+y}{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}$ sur $C = [0,1]^2$.

8. Étudier les extrema des fonctions suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^4 + y^4 - 2(x-y)^2 \end{array} \quad ; \quad g : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \dfrac{a}{x} + \dfrac{a}{y} + \dfrac{xy}{a^2} \end{array} \quad (a > 0 \text{ donné})$$

9. Dans la figure ci-dessous, ABC est un triangle isocèle de sommet principal C. Déterminer le maximum de la somme des aires des rectangles $IJKL$ et $MNOP$, en fonction de l'aire de ABC.



10. Soit Σ la nappe paramétrée par $(u,v) \mapsto F(u,v) \begin{cases} x = u + v \\ y = u^2 + v^2 \\ z = u^3 + v^3 \end{cases}$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

a) Quels sont les points singuliers de Σ ?

b) Trouver l'équation cartésienne d'une surface $\mathcal{S}$ contenant le support de Σ.

c) Transformer le paramétrage de Σ par $s = u + v$, $p = uv$ (pour $u < v$ par exemple).

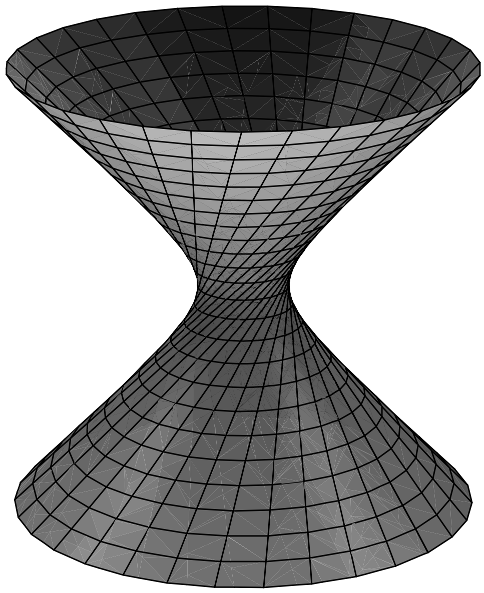
d) Vérifier que le support de Σ est une réunion de demi-droites.

11. On considère la surface $\mathcal{S}$ d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

a) Montrer que $\mathcal{S}$ ne contient aucune droite parallèle au plan xOy.

b) Soit $\mathcal{D}$ la droite définie par $\begin{cases} x = az + b \\ y = cz + d \end{cases}$. Montrer que $\mathcal{D}$ est incluse dans $\mathcal{S}$ si et seulement si la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est orthogonale.

c) Montrer que par tout point de $\mathcal{S}$ passent deux droites incluses dans $\mathcal{S}$.



12. Soit dans $\mathbb{R}^2$ l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation cartésienne $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (où $0 < b < a$).
Donner une condition nécessaire et suffisante sur u, v, h pour que la droite d'équation $ux + vy + h = 0$ soit tangente à $\mathcal{E}$.

13. Trouver les plans tangents à la surface $\mathcal{S}$ d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$ et orthogonaux à la droite d'équations $x = \dfrac{y}{3} = -\dfrac{z}{2}$.