T.D. 11b – Variables aléatoires discrètes

Sauf mention contraire, les variables aléatoires utilisées sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. © *Loi hypergéométrique* : cette loi usuelle (mais hors programme) modélise le tirage **sans remise** de n boules dans une urne contenant N boules dont une proportion p de boules blanches (*i.e.* Np boules blanches !). On désigne par Ω l'ensemble des tirages possibles (supposés équiprobables) et par X le nombre de boules blanches dans un tirage donné.

Déterminer $X(\Omega)$ et la loi de X. On vérifiera que

$$P(X=k) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}} \ ; \quad \text{on écrit } X \hookrightarrow \mathcal{H}(N,n,p).$$

Que devient $P(X=k)$ lorsque N tend vers l'infini (avec p constante) ?

Calculer $E(X)$ et $V(X)$. *On pourra justifier et utiliser la* ***formule de Vandermonde*** :

$$\forall (a,n) \in [\![0,N]\!]^2 \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{N-a}{n-k} = \binom{N}{n}.$$

2. © *Loi triangulaire* : autre loi usuelle (et hors programme !) qui modélise la somme S de deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivant la même loi uniforme $\mathcal{U}([\![1,n]\!])$. Déterminer la loi de S, son espérance et sa variance. Pourquoi l'appelle-t-on "loi triangulaire" ?

3. © Une urne contient n boules numérotées de 1 à n (n entier donné, $n \geq 2$). On effectue deux tirages successifs **sans remise**. On note X_1 le numéro de la première boule tirée et X_2 celui de la seconde.

a) Déterminer la loi du couple (X_1, X_2) et les lois marginales.

b) Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

c) Calculer leur coefficient de corrélation. Interpréter le résultat dans le cas $n = 2$.

4. © *Temps d'attente du deuxième succès* : on répète, de façon indépendante, une expérience aléatoire à l'issue de laquelle on obtient un succès avec une probabilité $p \in]0,1[$. On note X (*resp.* Y) la variable aléatoire donnant le rang du premier (*resp.* deuxième) succès.

Retrouver la loi de X et son espérance. Déterminer la loi conjointe du couple (X,Y).

En déduire la loi de Y et son espérance.

5. On effectue des tirages successifs avec remise dans une urne contenant initialement une boule noire et une boule blanche. À chaque tirage, on note la couleur de la boule tirée et on la remet dans l'urne en ajoutant en outre une boule noire. On note Y le rang d'apparition de la première boule noire et Z le rang d'apparition de la première boule blanche.

Déterminer la loi de Y, la loi de Z. Si elles existent, déterminer leurs espérances.

6. On lance une pièce amenant pile avec la probabilité $2/3$. On note X le nombre de lancers nécessaires à l'obtention (pour la première fois) de deux piles consécutifs. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $a_n = P(X=n)$.

Calculer a_1, a_2, a_3 ; déterminer une relation de récurrence linéaire double vérifiée par la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$; en déduire la loi de X et son espérance si elle existe.

7. Une urne contient deux boules blanches et une boule noire. On y effectue des tirages successifs selon la règle suivante : si la boule est noire, on la remet ; si elle est blanche, on remet à sa place une boule noire.

Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on note Y_n le nombre de boules blanches dans l'urne après le n-ième tirage.

a) Déterminer la loi de Y_1.

b) Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y_n = 2)$.

c) On pose $u_n = P(Y_n = 1)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$; trouver une relation de récurrence vérifiée par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$; en déduire la loi et l'espérance de Y_n.

d) On désigne par Z le plus petit des n tels que l'urne ne contient plus que des boules noires après le n-ième tirage. Déterminer la loi de Z et son espérance si elle existe.

8. Une urne contient des boules rouges, vertes et bleues en proportions respectives r, v, b (éléments de $]0,1[$ de somme 1). On effectue des tirages avec remise et l'on s'arrête au premier changement de couleur. On note X le nombre de tirages effectués. Déterminer la loi de X, son espérance si elle existe.

9. <u>*Séries de piles ou de faces*</u> : on considère une suite infinie de lancers d'une pièce amenant pile avec la probabilité $p \in]0,1[$, face avec la probabilité $q = 1 - p$. On appelle L_1 la longueur de la première série de lancers ayant tous donné le même résultat, L_2 la longueur de la deuxième série (lancers ayant tous donné le même résultat après le premier changement).

a) Déterminer la loi de L_1 et son espérance ; montrer que $E(L_1) \geq 2$, cas d'égalité ? Calculer la variance de L_1, en déduire ℓ tel que $L_1 \leq \ell$ avec une probabilité au moins égale à 0,99. Application numérique pour $p = 1/2$, $p = 1/3$.

b) Déterminer la loi conjointe de (L_1, L_2), en déduire la loi de L_2, puis $E(L_2)$.

c) À quelle condition L_1 et L_2 sont-elles indépendantes ? Lorsque c'est le cas, déterminer la loi de $L_1 + L_2$; interprétation ?

10. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On note pour tout n dans $\mathbb{N}^*$:

$$S_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \quad ; \quad Y_n = \frac{X_n + X_{n+1}}{2} \quad ; \quad T_n = \frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n}.$$

a) Justifier que : $\forall \varepsilon > 0 \quad P(|S_n - p| \geq \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

b) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la loi et l'espérance de Y_n ; pour $m < n$, Y_m et Y_n sont-elles indépendantes ?

c) Montrer que : $\forall \varepsilon > 0 \quad P(|T_n - p| \geq \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

11. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que la série entière $\sum P(X > n)\, t^n$ a un rayon de convergence au moins égal à 1. Pour $t \in]-1,1[$, exprimer sa somme $H(t)$ en fonction de $G_X(t)$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur H pour que X soit d'espérance finie et exprimer si c'est le cas $E(X)$ à l'aide de H.

12. Quelle est la fonction génératrice d'une variable aléatoire X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![2,12]\!])$?

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $[\![1,6]\!]$. En étudiant les racines de $G_{X_1} G_{X_2}$, montrer que l'on ne peut pas avoir $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![2,12]\!])$.

13. © <u>*Pseudo-solutions d'un système linéaire*</u> : étant donnée une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on note Φ_A l'application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ canoniquement associée à A ; on suppose $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que le système (S) $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ n'admette pas de solution.

On appelle alors *pseudo-solution* de (S) tout $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que :

$$\|AX_0 - B\| = \inf\{\|AX - B\|,\ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\}.$$

a) À l'aide de la projection orthogonale sur $\operatorname{Im}\Phi_A$, montrer que (S) admet au moins une pseudo-solution ; si en outre Φ_A est injective, montrer que (S) admet une unique pseudo-solution.

b) Pour $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, établir

$$X \text{ pseudo-solution de } (S) \Leftrightarrow \forall Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \quad (AY|AX - B) = 0 \Leftrightarrow {}^tAAX = {}^tAB.$$

c) <u>*Méthode des moindres carrés*</u> : étant donnés n points $M_k = (x_k, y_k)$, $1 \leq k \leq n$, de $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique, on cherche une droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = ax + b$ telle que $\sum\limits_{k=1}^{n} M_kH_k{}^2$ soit minimum, où $H_k = (x_k, ax_k + b)$.

Montrer que ce problème se ramène à la recherche des pseudo-solutions d'un système (S) de la forme $AX = B$, où l'on précisera les matrices A et B.

Quand Φ_A est-elle injective ? Lorsque c'est le cas, déterminer la pseudo-solution de (S).