T.D. 11a – Probabilités

1. © <u>*Masse de Dirac*</u> : soient Ω un ensemble non vide et $a \in \Omega$ fixé.
Pour toute partie A de Ω, on pose $P(A) = 1$ si $a \in A$, $P(A) = 0$ sinon.
Montrer que P est une probabilité sur $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega)\big)$.

2. © <u>*Formule de Poincaré (dite "du crible")*</u> : étant donnés n événements $A_1, \ldots, A_n$ dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, établir

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} P\left(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right).$$

3. © <u>*Le "paradoxe" du chevalier de Méré*</u> : est-il plus probable d'obtenir au moins un as en lançant 4 fois un dé, ou d'obtenir au moins un double as en lançant 24 fois deux dés ?

Antoine Combaud, chevalier de Méré (1607–1684), eut avec Blaise Pascal une longue correspondance et quelques controverses qui poussèrent ce dernier à formaliser les premiers calculs de probabilités.

4. © <u>*Les dates de naissance*</u> : sans tenir compte des années bissextiles, on suppose équiprobables les 365 dates (jour/mois) de naissance possible. Étant donnée une assemblée de N personnes, quelle est la probabilité pour qu'au moins deux d'entre elles aient leur anniversaire le même jour ?

5. Montrer que l'on peut définir une probabilité P sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P(\{n\}) = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Pour k donné dans $\mathbb{N}$, quelle est la probabilité qu'un entier soit multiple de k ?

6. On lance un dé équilibré jusqu'à l'obtention d'un 6.
Quelle est la probabilité que tous les résultats obtenus soient pairs ?

7. On lance (une seule fois) une pièce équilibrée, puis l'on effectue des tirages dans une urne contenant initialement une boule blanche et une boule noire selon la règle suivante :

- on tire une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne
- on ajoute dans l'urne une boule blanche si la pièce avait donné pile, une boule noire sinon

Ainsi l'urne contient $k+1$ boules au moment du k-ième tirage.

a) Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche au k-ième tirage ?

b) Quelle est la probabilité p_k d'avoir obtenu pile avec la pièce, sachant qu'on a tiré une boule blanche au k-ième tirage ?

c) Quelle est la probabilité d'obtenir k boules blanches lors des k premiers tirages ?

8. Deux archers A_1 et A_2 tirent alternativement sur une cible jusqu'à ce que l'un des deux la touche. A_1 commence. A_i touche la cible avec une probabilité $p_i \in \,]0,1[$; on note $q_i = 1 - p_i$. Les tirs sont indépendants.

a) Pour $i \in \{1,2\}$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer la probabilité pour que A_i l'emporte lors du tir numéro $2n+i$.

b) Calculer la probabilité de l'événement G_i :"A_i l'emporte" et la probabilité pour que le jeu ne se termine pas.

c) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur p_1 et p_2 pour que le jeu soit équitable. Que dire si $p_1 > 1/2$?

9. Un joueur tire à pile ou face jusqu'à obtention du premier pile. S'il lui a fallu n lancers, on lui fait tirer au hasard un billet de loterie parmi n, dont un seul est gagnant.

a) Quelle est la probabilité pour que le joueur gagne ?

b) Quelle est la probabilité qu'il ait obtenu pile au 3^{e} lancer, sachant qu'il a gagné ?

10. Une urne contient n boules rouges et n boules blanches. On tire les boules 2 par 2, sans remise, jusqu'à vider l'urne.

Quelle est la probabilité d'obtenir une boule de chaque couleur à chaque tirage ?

11. © Vous venez de passer un test pour le dépistage d'une maladie rare, qui atteint 0,1% de la population. Hélas le test est positif et le médecin vous dit : « Chez les personnes atteintes, le test est positif dans 90% des cas ; chez les sujets sains, il est négatif dans 97% des cas ». Quelle est la probabilité que vous ayez vraiment cette maladie ?

12. On dispose de deux pièces A et B, donnant pile avec les probabilités respectives a, b de $]0,1[$. On choisit au hasard l'une des deux pièces puis on la lance. Si l'on obtient pile on relance la même pièce, sinon on lance l'autre et ainsi de suite. On obtient ainsi une suite infinie de lancers.

On note E_n l'événement "on utilise A pour la 1$^{\text{re}}$ fois lors du n-ième lancer" et V_n : "on a obtenu n piles lors des n premiers lancers".

a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, calculer $P(E_n)$ et $P(V_n)$.

b) En déduire $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)$ et $P\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} V_n\right)$.

13. Une urne A contient deux boules portant le numéro 0 et une urne B contient deux boules portant le numéro 1. On tire au hasard une boule dans chaque urne pour la remettre dans l'autre urne. On recommence n fois et l'on s'intéresse à la somme s_A des numéros des boules présentes dans A après les n échanges. On définit les événements suivants :

- Z_n : "après n échanges s_A vaut 0" ; on note $z_n = P(Z_n)$
- U_n : "après n échanges s_A vaut 1" ; on note $u_n = P(U_n)$
- D_n : "après n échanges s_A vaut 2" ; on note $d_n = P(D_n)$

a) Calculer z_0, u_0, d_0 et z_1, u_1, d_1.

b) Exprimer z_{n+1}, u_{n+1}, d_{n+1} en fonction de z_n, u_n, d_n.

c) En déduire les expressions de z_n, u_n, d_n en fonction de n et leurs limites quand n tend vers l'infini.

14. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille quelconque d'événements.

a) On suppose dans cette question que $\sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$ converge. En considérant l'événement

$$B = \bigcap_{n=0}^{\infty}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right),$$

et son complémentaire, montrer qu'il est presque certain que seul un nombre fini des A_k se réalisent simultanément.

b) On suppose dans cette question que les A_n sont mutuellement indépendants et que $\sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$ diverge.

Montrer qu'il est presque certain qu'une infinité des A_k se réalisent simultanément.