T.D. 10 – Équations différentielles linéaires

1. Résoudre l'équation différentielle suivante : $y' \sin^3 x - 2y\cos x = 0$.
Dimension de l'espace des solutions sur $\mathbb{R}$?

2. Soient $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, 2π-périodique, $a \in \mathbb{R}^*$ et l'équation différentielle :

$$(E) \quad y' + ay = b(t).$$

a) Montrer qu'une solution f de (E) est 2π-périodique si et seulement si $f(0) = f(2\pi)$.

b) En déduire que (E) admet une solution 2π-périodique et une seule.

3. Résoudre l'équation différentielle :

$$(E) \quad xy'' - 2(x-1)y' + (x-2)y = xe^x$$

à l'aide du changement de fonction inconnue $z = y' - y$.

4. Résoudre les systèmes différentiels suivants :

$$\textbf{a)} \quad \begin{cases} x' = y + \cos t \\ y' = -x + 1 \end{cases} \qquad \textbf{b)} \quad \begin{cases} x' = 7x + 2y - 2z + t \\ y' = 2x + 4y - z + 2t \\ z' = -2x - y + 4z - t \end{cases} \qquad \textbf{c)} \quad \begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = -4x - y \\ z' = 4x - 8y + 2z \end{cases} .$$

5. Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = (t-2)x - (t-1)y \\ y' = 2(t-1)x - (2t-1)y \end{cases} .$$

6. Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y'' + y = t^2 \cos^2 t$.

b) $y'' - \dfrac{2x}{1+x^2}y' + 2\dfrac{x^2-1}{(x^2+1)^2}y = 0$ (chercher un polynôme solution).

c) $y'' - \dfrac{2}{x}y' + \dfrac{2}{x^2}y = \sin x$ (remarquer que $x \mapsto x$ est solution de l'équation homogène associée).

d) $2x(1-x)y'' + (2-5x)y' - y = 0$ (chercher une solution développable en série entière).

e) $x^2y'' + xy' - 4y - 4x^2 = 0$ (poser $x = e^t$ sur $\mathbb{R}^{+*}$).

7. Résoudre l'équation différentielle : $x^3y' = y(3x^2 + y^2)$ en comparant deux méthodes.

a) En posant $y = tx$ *(équation homogène)*.

b) En posant $z = 1/y^2$ *(équation de Bernoulli)*).

8. Soit l'équation différentielle (E) : $y' = \dfrac{1}{1+t^2+y^2}$.

a) Montrer que les solutions maximales sont définies sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que la solution maximale f vérifiant $f(0) = 0$ est impaire.