# T.D. 9 – Dérivation des fonctions à valeurs vectorielles, arcs paramétrés

**1.** Soient $n$ entier, $n \geq 2$, et $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n$ admettant $n$ racines réelles distinctes.
Montrer que $Q = P^2 + 1$ admet $2n$ racines distinctes dans $\mathbb{C}$.

**2.** © Soit $f$ la restriction de la fonction tan à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On note $a_n = \dfrac{1}{n!} f^{(n)}(0)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$ *(on pourra remarquer que $f' = 1 + f^2$).*
En déduire le développement limité à l'ordre 7 en 0 de la fonction tan.

**3.** © <u>*Théorème de Darboux*</u> : soient $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable et $(a,b) \in I^2$.

**a)** Si $f'(a)\, f'(b) < 0$, montrer qu'il existe $c \in ]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

**b)** En déduire que, si $y \in ]f'(a), f'(b)[$, alors il existe $c \in ]a,b[$ tel que $f'(c) = y$ *(autrement dit, $f'$ vérifie la propriété des valeurs intermédiaires).*

**4.** Soient $f : I \to \mathbb{R}$, dérivable, et $k > 0$ tels que : $\forall x \in I \quad |f'(x)| \leq k\,|f(x)|$.
Montrer que, si $f$ s'annule en un point de $I$, alors $f$ est identiquement nulle sur $I$ *(on pourra utiliser $g : x \mapsto [f(x)]^2 e^{-2kx}$).*

**5.** Soit $E$ un espace vectoriel euclidien et $f : I \to E$ deux fois dérivable, telle que $\|f\|$ soit constante. Montrer que $(f|f'')$ est à valeurs négatives. Interprétation cinématique ?

**6.** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme $\|\cdot\|$, et $f : \mathbb{R} \to E$, continue en 0, telle que

$$\frac{1}{t} \cdot \big[f(t) - f(kt)\big] \underset{t \to 0}{\longrightarrow} \ell \quad \text{où} \quad k \in ]0,1[ \text{ et } \ell \in E \text{ sont donnés.}$$

**a)** Montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}^* \quad |t| \leq \delta \Rightarrow \left(\forall i \in \mathbb{N} \quad \left\|\frac{1}{t} \cdot \left[f\left(k^i t\right) - f\left(k^{i+1} t\right)\right] - k^i.\ell\right\| \leq k^i \varepsilon\right).$$

**b)** En déduire que $f$ est dérivable en 0 et exprimer $f'(0)$ en fonction de $\ell$ et de $k$.

**7.** <u>*Folium de Descartes*</u> : on considère l'arc paramétré par $t \mapsto \left(\dfrac{3t}{t^3+1}, \dfrac{3t^2}{t^3+1}\right)$.
Montrer qu'il suffit de mener l'étude sur $]-1,1]$.
Étudier l'arc et tracer son support, dont on donnera une équation cartésienne.

**8.** <u>*Cycloïde*</u> : étudier l'arc paramétré par $t \mapsto \big(R(t - \sin t), R(1 - \cos t)\big)$ et tracer son support.
Calculer la longueur d'une *"arche"*.

**9.** <u>*Néphroïde*</u> : étudier et tracer l'arc paramétré par $t \mapsto \big(3\cos t - \cos 3t, 3\sin t - \sin 3t\big)$.
Calculer sa longueur.

**10.** Soit la famille d'arcs paramétrés par $t \mapsto \left(t^2 + \dfrac{a}{t}, (t+1)^2 + \dfrac{b}{t}\right)$ où $(a,b)$ décrit $\mathbb{R}^2$.
Montrer que toutes les asymptotes ont un point commun.

**11.** Montrer que l'arc paramétré par $t \mapsto \left(t(3-2t)(t-1)^2, t - 1 + \dfrac{1}{t}\right)$ comporte un point de rebroussement de seconde espèce que l'on précisera ; on situera, au voisinage de ce point, les deux branches de la courbe de part et d'autre d'un arc de parabole.