T.D. 8 – Espaces préhilbertiens et euclidiens

1. © <u>*Polynômes orthogonaux - généralités*</u> : soient a, b dans $\overline{\mathbb{R}}$ $(a < b)$ et ω une application continue de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}^+$, s'annulant en un nombre fini de points et telle que, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, la fonction $t \mapsto P(t)\omega(t)$ soit intégrable sur $]a, b[$.

a) Montrer que l'on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ en posant :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2 \quad (P|\, Q) = \int_a^b P(t)Q(t)\omega(t)\mathrm{d}t.$$

b) Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite orthormalisée de la suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$, par la méthode de Schmidt pour ce produit scalaire. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, e_n est scindé, à racines simples, toutes éléments de $]a, b[$ *(on pourra poser $Q = \prod_{k=1}^{p}(X - \alpha_k)$, où les α_k sont les racines d'ordre impair de e_n appartenant à $]a, b[$, puis s'intéresser au produit $Q \times e_n$ pour montrer que $p = n$).*

2. © Soit p un projecteur d'un espace préhilbertien E. Montrer que p est une projection orthogonale si et seulement si :

$$\forall u \in E \quad \|p(u)\| \leq \|u\|\,.$$

3. © <u>*Déterminant de Gram*</u> : soit E un espace vectoriel euclidien, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \leq \dim E$, $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale directe d'un sous-espace orienté de E contenant $u_1, \ldots, u_n$; on note A la matrice du système $(u_1, \ldots, u_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ et $G(u_1, \ldots, u_n)$ la matrice $((u_i|u_j))_{1\leq i,j\leq n}$, appelée *matrice de Gram* du système $(u_1, \ldots, u_n)$.

a) Montrer que $G(u_1, \ldots, u_n) = {}^tAA$. En déduire, lorsque $n = \dim E$, la propriété du produit mixte :

$$[u_1, \ldots, u_n]^2 = \det G(u_1, \ldots, u_n)$$

b) Montrer que $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}\left({}^tAA\right)$; en déduire : $\operatorname{rg}(u_1, \ldots, u_n) = \operatorname{rg} G(u_1, \ldots, u_n)$.

c) Soit F un sous-espace strict de E muni d'une base $(b_1, \ldots, b_p)$ et v un vecteur de E. Montrer que la distance d de v à F est donnée par :

$$d^2 = \frac{\det G(b_1, \ldots, b_p, v)}{\det G(b_1, \ldots b_p)}.$$

4. Soit E un espace vectoriel euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad (x|\, y) = 0 \Rightarrow (f(x)\,|\, f(y)) = 0.$$

Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tel que : $\forall (x, y) \in E^2 \quad (f(x)\,|\, f(y)) = \alpha\, (x|\, y)$.

(On pourra utiliser une base orthonormale de E.)

5. Déterminer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 x^2 (\ln x - ax - b)^2\, \mathrm{d}x$.

6. © Soit E un espace vectoriel euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall x \in E \quad (u(x)\,|x) = 0$.

a) Montrer que u est antisymétrique, c'est-à-dire que

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \big(x|u(y)\big) = -\big(u(x)\,|y\big)\,.$$

En déduire que $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont supplémentaires orthogonaux.

b) Montrer que u est de rang pair *(on pourra s'intéresser à l'endomorphisme induit par u sur $\operatorname{Im} u$).*

7. Soient a un vecteur unitaire d'un espace vectoriel euclidien E et $\lambda \in \mathbb{R}$; on considère l'endomorphisme f_λ de E défini par : $\forall u \in E \quad f_\lambda(u) = u + \lambda(a|u)a$.

a) Montrer que f_λ est un endomorphisme symétrique de E ; pour quelles valeurs de λ est-il un automorphisme ? Un automorphisme orthogonal ?

b) Déterminer les éléments de réduction de f_λ.

8. Dans E espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, soit $(a,b,c) \in E^3, \text{Det}\,(a,b,c)$ désigne le déterminant de la famille (a,b,c) dans une base orthonormée directe (*produit mixte*).

Montrer que $|\text{Det}\,(a,b,c)| \leq \|a\|\ \|b\|\ \|c\|$, avec égalité si, et seulement si, l'un des vecteurs est nul ou (a,b,c) est orthogonale.

9. © *Expression intrinsèque d'une rotation dans l'espace* : soit E une espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, $\vec{a}$ un vecteur unitaire de E, θ réel et r la rotation d'axe orienté par $\vec{a}$ d'angle θ. Montrer que :

$$\forall \vec{u} \in E \quad r(\vec{u}) = p(\vec{u}) + \cos\theta . q(\vec{u}) + \sin\theta . \vec{a} \wedge \vec{u}$$

où p est la projection orthogonale sur l'axe $D = \text{Vect}\,(\vec{a})$ et $q = \text{Id}_E - p$ *(on pourra commencer par le cas où $\vec{u}$ est orthogonal à l'axe).*

Montrer comment cette relation permet d'obtenir directement la matrice de r dans une base orthonormale directe donnée.

Expliquer comment déterminer l'axe et l'angle d'une rotation donnée par sa matrice dans une base orthonormale directe *(on pourra séparer parties symétrique et antisymétrique).*

10. Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la rotation d'angle $2\pi/3$ d'axe dirigé et orienté par le vecteur $(1,-1,1)$.

11. Caractériser géométriquement les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices suivent :

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -1 & -4 \\ -1 & 8 & -4 \\ -4 & -4 & -7 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

12. **a)** Soient f et g deux endomorphismes symétriques et positifs d'un espace vectoriel euclidien E tels que $g^2 = f$; soit $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ le spectre de f. Montrer que les valeurs propres de g sont les $\sqrt{\lambda_k}$, $k \in \mathbb{N}_p$ et que : $\forall k \in \mathbb{N}_p \quad \text{Ker}\left(g - \sqrt{\lambda_k}.\text{I}_E\right) = \text{Ker}\,(f - \lambda_k.\text{I}_E)$.

b) © *Racine carrée d'un endomorphisme symétrique et positif* : en déduire que, pour tout endomorphisme symétrique et positif f de E, il existe un unique endomorphisme symétrique et positif g tel que $g^2 = f$.

c) © *Décomposition polaire* : soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique matrice symétrique définie positive S telle que $S^2 = A\,{}^tA$.

En déduire qu'il existe un unique couple (Ω, S) où Ω est orthogonale et S symétrique définie positive tel que $A = S\Omega$.