T.D. 7 – Intégration sur un intervalle quelconque

1. Montrer l'existence des intégrales suivantes et établir les résultats fournis :

$$\int_0^1 (-\ln t)^n \,\mathrm{d}t = n! \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\lambda)} = \frac{\pi}{4} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \quad \textit{(poser } t = \frac{1}{x}\textit{)}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{3/2}} = 2 \qquad \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \pi \quad (a < b)$$

2. **a)** En minorant $f : x \mapsto \dfrac{\sin^2 x}{x}$ sur des intervalles bien choisis, montrer que f n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.

b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} \mathrm{d}x$ converge pour tout $\alpha > 0$, alors que $g_\alpha : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x^\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.

c) Étudier la nature des intégrales impropres $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} + \sin x} \mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} + \cos x} \mathrm{d}x$.

3. Soient $A \in \mathbb{R}^{+*}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ tels que : $\forall x \geq A \quad |f(x)| \leq e^{\alpha x}$; montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} e^{-nx} f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{et, si } f \text{ est bornée,} \quad \lim_{n\to\infty} n \int_0^{+\infty} e^{-nx} f(x)\,\mathrm{d}x = f(0).$$

4. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{+\infty} f = \ell \in \mathbb{R}$; montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{n^2 + x^2} \mathrm{d}x = \frac{\pi \ell}{2}$.

5. Montrer que : $\displaystyle\int_2^{+\infty} (\zeta(x) - 1)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}$ (où $\displaystyle\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$, pour $x > 1$).

6. Montrer que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1} \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$.

7. À l'aide du développement en série de $\ln(1-t)$, calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t \ln(1-t)}{t} \mathrm{d}t$.

8. **a)** Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}^{+*}$, telle que $x \mapsto f(x)\,e^{-x}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$. Déterminer

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n f(x)\,\mathrm{d}x.$$

b) <u>*Application*</u> : on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln x \mathrm{d}x.$$

À l'aide d'une intégration par parties, en remarquant que

$$\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{n}{n+1}\left(1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n+1}\right)\right]$$

établir

$$I_n = \frac{n}{n+1}\left(\ln n - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}\right).$$

En déduire

$$\gamma = -\int_0^{+\infty} e^{-x} \ln x \mathrm{d}x.$$

9. Définition et calcul de $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln t}\mathrm{d}t$ *(on pourra déterminer f').*

10. Montrer que la fonction $G : x \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} e^{2i\pi tx}\mathrm{d}t$ est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle linéaire du premier ordre que l'on précisera. En déduire la valeur de $G(x)$.

11. Calculer, pour $x > 1$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(x + \cos t)\,\mathrm{d}t$.

12. On pose $\phi(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t + x}\mathrm{d}t$, pour $x > 0$.

a) Montrer que ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, calculer $\phi'(x)$, pour $x > 0$.

b) En déduire, toujours pour $x > 0$, la valeur de $\psi(x) = \phi(x) + \phi\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

13. © *Intégrale de Poisson* : on pose, pour x réel,

$$I(x) = \int_0^{\pi} \ln\left(1 - 2x\cos t + x^2\right)\mathrm{d}t.$$

a) Justifier la définition de $I(x)$ et établir, pour x non nul,

$$I\left(\frac{1}{x}\right) = I(x) - 2\pi \ln|x|.$$

b) Montrer que la fonction I est paire et continue sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que la fonction I est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et préciser I' sur cet intervalle.

d) En déduire la valeur de $I(x)$, pour tout réel x.

14. © *Intégrale de Dirichlet* : on pose, pour $x \in \mathbb{R}^+$,

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t.$$

a) Justifier la définition et la continuité de f sur $\mathbb{R}^+$ *(pour la continuité en 0, on pourra faire apparaître $f(x)$ comme somme d'une série alternée).*

b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et préciser f' sur cet intervalle.

c) En déduire la valeur de $f(x)$, pour tout $x \geq 0$.

d) En déduire enfin :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$