T.D. 6 – Séries entières

1. © Soit (a_n) une suite de réels positifs ou nuls telle que la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ ait pour rayon de convergence 1. On suppose en outre que sa somme S est bornée sur $[0,1[$.

Montrer que la série numérique $\sum a_n$ converge et que $\lim\limits_{x\to 1^-} S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Ce résultat subsiste-t-il lorsque les a_n sont de signe quelconque ?

(Voir en complément au verso le théorème d'Abel.)

2. Exprimer les coefficients du développement en série entière de $\arcsin x$ sur $]-1,1[$ à l'aide de factorielles. Montrer que ce développement est valable sur le segment $[-1,1]$.

3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 2} (-1)^n \ln n \cdot x^n$. Soit S sa somme.

Montrer que : $\forall x \in\,]-1,1[\quad S(x) = \dfrac{1}{1+x} \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) x^{n+1}$.

En déduire que $S(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

Calculer cette dernière limite à l'aide de la formule de Stirling.

4. On pose : $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \binom{2n}{n}}{2n-1} x^n$. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.

Montrer que $2f = (1+4x)f'$. En déduire l'expression de f.

5. Déterminer le rayon de convergence, le domaine réel de convergence et calculer la somme des séries entières suivantes :

$$\textbf{a)} \sum_{n\geq 0} \frac{n^3+n+3}{n+1} \cdot x^n \quad ; \qquad \textbf{b)} \sum_{n\geq 1} \frac{(n+1)^2}{n!} \cdot x^n$$

6. Trouver l'ensemble de définition de f et calculer : $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n-(-1)^n}$.

7. Calculer le réel $\alpha = \sum\limits_{n\geq 3} \dfrac{1}{2^n (n+1)(n-2)}$.

8. Développer en série entière au voisinage de 0 $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1}$.

(Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$.)

9. © *Inverse d'une série entière* : soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, telle que $a_0 = 1$.

a) Montrer qu'il existe une unique suite (b_n) telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \delta_{0,n} .$$

b) Soit $r \in\,]0,R[$; justifier l'existence de $M > 0$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n r^n| \leq M$.

r et M étant ainsi fixés, établir

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |b_n| \leq \frac{M(M+1)^{n-1}}{r^n}.$$

c) En déduire que la série entière $\sum b_n z^n$ a un rayon de convergence non nul. Conclure.

10. © <u>*Théorème d'Abel*</u> : soit $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ la fonction somme d'une série entière, à coefficients complexes, de rayon de convergence $R > 0$.

Si la série numérique $\sum a_n R^n$ converge, alors $f(x)$ tend vers la somme de cette série lorsque x tend vers R par valeurs inférieures.

Pour démontrer cela :

- montrer que l'on peut se ramener au cas où $R = 1$ et $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = 0$

- utiliser la transformation d'Abel : poser $S_{-1} = 0$, $S_p = \sum\limits_{n=0}^{p} a_n$ et établir

$$\forall x \in \left]0,1\right[\quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \sum_{n=0}^{N} (S_n - S_{n-1}) x^n = \sum_{n=0}^{N} S_n \left(x^n - x^{n+1}\right) + S_N x^{N+1}$$

- en déduire

$$\forall x \in \left]0,1\right[\quad f(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n$$

- conclure.