T.D. 5 – Suites et séries de fonctions

1. Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions (f_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) = \cos \frac{nx}{n+1}.$$

2. Sur l'intervalle $[0, \pi/2]$, étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions (f_n) définie par (α étant un réel fixé) : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0, \pi/2] \quad f_n(x) = n^\alpha \sin x \cos^n x$.

Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f_n(x)\,\mathrm{d}x$. Que se passe-t-il lorsque n tend vers l'infini ?

3. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$: $u_n(x) = (-1)^n \cdot \dfrac{x}{n^x}$.

a) Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

b) Étudier la convergence simple et uniforme de la série de fonctions $\sum u_n$, puis sa convergence normale sur les demi-droites de la forme $[a, +\infty[$.

4. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ définie par : $\forall n \geq 2 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad u_n(t) = \dfrac{te^{-nt}}{\ln n}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$, mais pas normalement.

5. Étudier la continuité de $S : t \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t}{1+n^2t^2}$

(on pourra déterminer la limite de S en 0^+ à l'aide d'une comparaison avec une intégrale).

6. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe convergeant vers 0.

a) Montrer la définition et la continuité sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$.

b) On pose : $\forall n \in \mathbb{N} \quad M_n = \sup\limits_{p\geq n} |a_p|$. Montrer que la suite (M_n) décroît vers 0.

c) En déduire que : $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(e^x)$ *(on pourra utiliser le théorème de la double limite).*

7. Étudier la convergence simple et uniforme de la série de fonctions $\sum u_n$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad u_n(t) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{t^2}{n(1+t^2)}\right).$$

Déterminer la limite de la fonction somme en $+\infty$ *(on pourra utiliser la formule de Stirling).*

8. Montrer que la série de fonctions $\sum w_n$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad w_n(x) = \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}$$

converge uniformément sur $[1, +\infty[$. En déduire que

$$\zeta(x) \underset{x\to1^+}{=} \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1) \quad \text{où} \quad \zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}\ , \gamma \text{ étant la constante d'Euler.}$$

9. On pose, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t+\cdots+t^n}$.
Montrer que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ et étudier la nature de la série de terme général $u_n - \ell$.

10. Étant donnés un segment $[a,b]$ (a, b réels tels que $a < b$) et une fonction f_0 continue sur $[a,b]$, on définit la suite de fonctions (f_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [a,b] \qquad f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,b]$ et que sa fonction somme S vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 1, que l'on précisera. En déduire la fonction S.

11. Ensemble de définition et continuité de la fonction $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n+1}$.

Étudier la dérivabilité de S. Calculer $S(x)$.

12. Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ et que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.