T.D. 4 – Espaces vectoriels normés

1. Soient a, b réels tels que $0 < a < b$.
Montrer que l'on définit deux suites adjacentes (a_n) et (b_n) en posant $a_0 = a$, $b_0 = b$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}.$$

Exprimer a_n, b_n en fonction de n, de b et de $\theta = \arccos \dfrac{a}{b}$.
En déduire la valeur de la limite commune des suites (a_n) et (b_n).

2. © Étudier la suite (u_n) définie par : $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.
Donner un équivalent de u_n.
(On pourra chercher la limite de $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$ *et utiliser le théorème de* CESÀRO*.)*

3. Étudier la suite définie par : $u_0 \in [0, 1]$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{1 - u_n}$.

4. © Pour z complexe donné, étudier la convergence de la suite complexe définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad Z_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

5. Sur $E = \mathbb{R}[X]$, on définit trois applications N_1, N_∞ et N en posant, pour $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$,

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{n} |a_k| \quad ; \quad N_\infty(P) = \max_{0 \le k \le n} |a_k| \quad ; \quad N(P) = \max_{t \in [0,1]} |P(t)|.$$

Montrer que N_1, N_∞ et N sont trois normes sur E. Sont-elles équivalentes ?

6. Pour $f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$, on pose $N(f) = \left[f^2(0) + \displaystyle\int_0^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}t\right]^{1/2}$.
Montrer que N est une norme sur $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ et que : $\forall f \in E \quad N_\infty(f) \le \sqrt{2} N(f)$.
N et N_∞ sont-elles équivalentes ?

7. Soit E un espace vectoriel normé.
a) Montrer que toute boule ouverte est un ouvert et que toute boule fermée est un fermé.
b) Soit B une boule ouverte de E et B_f la boule fermée de même centre et de même rayon ; montrer que $B = \mathring{B}_f$ et $B_f = \overline{B}$.

8. Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. Montrer que :

$$A \text{ ouvert} \Leftrightarrow A \cap \mathrm{Fr}\, A = \emptyset \quad ; \quad A \text{ fermé} \Leftrightarrow \mathrm{Fr}\, A \subset A.$$

9. Soient $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{S}_n$ les sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ formés des matrices respectivement symétriques et antisymétriques. Montrer que $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{S}_n$ sont fermés et que, si $A \in \mathcal{A}_n$, la seule limite possible pour la suite $\left(A^k\right)$ est la matrice nulle.

10. © Soit E un espace vectoriel normé, x un élément de E et A une partie non vide de E.
Montrer que : $x \in \overline{A} \Leftrightarrow d(x, A) = 0$.
Soient F et G deux fermés disjoints de E. Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints de E contenant respectivement F et G *(on pourra utiliser une fonction continue bien choisie)*.
Montrer que $\emptyset$ et E sont les seules parties de E à la fois ouvertes et fermées.

11. Soit E un espace vectoriel normé, $E \neq \{0\}$. Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{1}{1 + \|x\|} \cdot x$ définit un homéomorphisme de E dans la boule ouverte $B(0, 1)$ (c'est-à-dire que f est continue, bijective et que f^{-1} est continue).

12. © *Le théorème du point fixe pour une application contractante*

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, A une partie fermée non vide de E et f une application de A dans A, lipschitzienne de rapport r, avec $r \in [0, 1[$. Montrer que f admet un unique point fixe ℓ dans A et que, pour tout élément a de A, la suite définie par

$$u_0 = a \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

converge vers ℓ *(on montrera que la série* $\sum (u_{n+1} - u_n)$ *est absolument convergente et on établira :* $\forall n \in \mathbb{N} \quad \|u_n - \ell\| \leq \frac{r^n}{1-r} \|u_1 - u_0\|$*).*

13. © Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, K une partie fermée bornée non vide de E et $f : K \to K$ vérifiant :

$$\forall (x, y) \in K^2 \quad x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\| .$$

Montrer que f admet un unique point fixe dans K *(considérer* $\alpha = \inf \left\{ \|f(x) - x\|, \ x \in K \right\}$*).*