T.D. 3 – Compléments sur les séries numériques

1. Étudier la nature des séries dont le terme général est donné ci-dessous, en discutant éventuellement suivant les valeurs des paramètres :

$$u_n = \arccos\left(\frac{2}{\pi}\arctan n^2\right) \quad ; \quad u_n = \left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{n^\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^4+1}\right) \quad ; \quad u_n = \sqrt{\ln(n+1)} - \sqrt{\ln n}$$

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha}\sum_{k=1}^{n} k^{3/2} \quad (\alpha > 0) \quad ; \quad u_n = \sqrt[3]{n^3-4n^2+5n} - \sqrt{n^2+\alpha n+\beta} \quad \left((\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\right)$$

$$u_n = \ln\left(\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+\alpha}}\right) \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \quad ; \quad u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n n^\beta} \quad \left((\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\ ;\ \alpha \neq \beta\right)$$

2. Déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ pour que la série de terme général $u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$ converge et calculer alors sa somme.

3. Montrer que, pour tout k fixé dans $\mathbb{N}^*$: $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{nk+1}$.

4. Calculer les sommes des séries suivantes $\left(a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{3^n} \quad ; \quad \sum_{n\geq 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \quad ; \quad \sum_{n\geq 0} \ln\left(\cos\frac{a}{2^n}\right) \quad ; \quad \sum_{k\geq 1} \frac{k}{2^k\,(k+1)!}.$$

5. Étant donnée une suite (u_n) à valeurs dans $]0,1[$ et de limite nulle, étudier la suite (P_n) définie par :

$$\forall n \geq 2 \quad P_n = \prod_{k=0}^{n} (1-u_k)\,.$$

6. © <u>*Règle de Raabe-Duhamel*</u> : soit $\sum x_n$ une série à termes dans $\mathbb{R}^{+*}$ telle que

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

En comparant (x_n) à une suite de la forme $\left(1/n^\beta\right)$, montrer que, si $\alpha > 1$, alors $\sum x_n$ converge et que, si $\alpha < 1$, alors $\sum x_n$ diverge.

<u>*Exemple*</u> : soient a, b dans $\mathbb{R}^{+*}$; étudier la nature de la série de terme général :

$$u_n = \frac{a\,(a+1)\ldots(a+n-1)}{b\,(b+1)\ldots(b+n-1)}.$$

7. © <u>*Test de condensation de Cauchy*</u> : soit (u_n) une suite de réels positifs, décroissante.

Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum 2^n u_{2^n}$ sont de même nature.

Que donne le résultat précédent pour les séries de Riemann ?

Et pour les séries de Bertrand de la forme $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\,(\ln n)^\beta}$?

8. a) Montrer que, pour tout $a > 0$, la série de terme général $\dfrac{1}{\sqrt{n}\,(n+a)}$ est convergente, de somme inférieure ou égale à $\dfrac{\pi}{\sqrt{a}}$.

b) En déduire l'inégalité de Hilbert : pour $n \in \mathbb{C}^*$, $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ dans $\mathbb{C}$,

$$\left|\sum_{1\leq i,j\leq n} \frac{a_i b_j}{i+j}\right| \leq \pi\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^2\right)^{1/2}.$$