T.D. 2 – Réduction des endomorphismes, des matrices carrées

1. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $A \neq 0$ et $A^3 + A = 0$.

Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ admettant un polynôme annulateur non nul.

Montrer que u est injectif si et seulement si u est surjectif.

3. © Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ admettant un polynôme annulateur P de valuation 1. Montrer que $E = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} u$ et qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E où la matrice de u est de la forme $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, où A est une matrice carrée inversible.

4. © Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que $u \circ v$ et $v \circ u$ ont les mêmes valeurs propres. Ce résultat subsiste-t-il en dimension infinie ?

5. © <u>*Théorème de* Hadamard - *disques de* Gerschgorin</u>

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Démontrer que si : $\forall i \in \mathbb{N}_n \quad |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$, alors A est inversible.

En déduire que le spectre de A est inclus dans $\bigcup_{1 \leq i \leq n} B_f\left(a_{ii}, \sum_{j \neq i} |a_{ij}|\right)$ ($B_f(a,r)$ désignant la boule fermée de centre a de rayon r, à savoir — dans $\mathbb{C}$ — le disque fermé $\{z \in \mathbb{C} \ / \ |z-a| \leq r\}$).

6. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. On définit $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$ par $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$.

Montrer que $\chi_M = \chi_{A+B} \times \chi_{A-B}$.

7. Soient, pour $k \in \mathbb{N}$, $f_k : x \mapsto \cos kx$ et $g_k : x \mapsto \sin kx$.

Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(f_0, f_1, g_1, \ldots, f_n, g_n)$ est libre.

8. © Pour les propriétés suivantes, donner deux démonstrations : l'une faisant appel au théorème de Cayley-Hamilton, l'autre pas.

a) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente, alors $A^n = 0$.

b) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, alors A^{-1} est un polynôme en A.

9. Soient u, h deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie et $\alpha \in \mathbb{K}^*$ tels que $h \circ u - u \circ h = \alpha . u$.

a) Si x est un vecteur propre de h associé à la valeur propre λ, établir

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad h \circ u^k(x) = (\lambda + k\alpha) . u^k(x) .$$

En déduire qu'il existe k dans $\mathbb{N}$ tel que $u^k(x) = 0$.

b) Montrer que, si en outre h est diagonalisable, alors u est nilpotent.

10. Soient A et B deux matrices non nulles de $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On considère l'endomorphisme de E $\phi : M \mapsto M + \operatorname{Tr}(AM) . B$.

Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres de ϕ.

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que ϕ soit diagonalisable.

11. © Soient A et B deux matrices carrées à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

Montrer que M est diagonalisable si et seulement si A et B le sont.

12. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

Montrer que M est diagonalisable si et seulement si $A = 0$.

13. Soit u un endomorphisme nilpotent d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n.
Déterminer le polynôme caractéristique de u.
Si en outre u est nilpotent d'indice n (*i.e.* $u^{n-1} \neq 0$ et $u^n = 0$), montrer que les sous-espaces de E stables par u sont les $\operatorname{Ker} u^k$, $0 \leq k \leq n$.

14. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de rang 1. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{Tr} A \neq 0$.

15. © <u>*Déterminants circulants*</u> : soient $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$,

où $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$.

a) Montrer que les vecteurs de la forme $(1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1})$ où ω est une racine n-ième de 1 forment une base de vecteurs propres de C.

b) En déduire la valeur de $\det A$ *(on pourra remarquer que A s'écrit comme un polynôme en C).*

16. À quelle condition la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ \vdots & & & \\ \vdots & & (0) & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

17. Diagonaliser la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, puis calculer M^n.
Déterminer les matrices qui commutent avec M.

18. Trigonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 6 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, en déduire les puissances de A.

19. Soient E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Déterminer les sous-espaces de E stables par u.

20. Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'équation : $M^2 + M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, d'inconnue M.