T.D. 1 – Compléments d'algèbre linéaire

1. © Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que, si $u(x)$ est colinéaire à x pour tout x de E, alors u est de la forme $\lambda.\mathrm{Id}_E$.

2. © Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$. Montrer que :

a) $v \circ u = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Ker}\, v$.

b) $\mathrm{Ker}\, u \subset \mathrm{Ker}(v \circ u)$ et $\mathrm{Im}(v \circ u) \subset \mathrm{Im}\, v$.

3. © Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$.

a) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathrm{Ker}\, u^k \subset \mathrm{Ker}\, u^{k+1}$ et $\mathrm{Ker}\, u^k = \mathrm{Ker}\, u^{k+1} \Rightarrow \mathrm{Ker}\, u^{k+1} = \mathrm{Ker}\, u^{k+2}$.

b) Énoncer et prouver des propriétés analogues concernant les images.

4. © Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $k \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathcal{L}(E)$ tels que : $u^{k-1} \neq 0$ et $u^k = 0$ (u est dit *nilpotent d'indice* k).

a) Soit $a \in E$; montrer que $\big(a, u(a), u^2(a), \ldots, u^{k-1}(a)\big)$ est libre si et seulement si $u^{k-1}(a) \neq 0$.

b) Montrer que l'on a les inclusions *strictes* : $\{0\} \subsetneq \mathrm{Ker}\, u \subsetneq \mathrm{Ker}\, u^2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathrm{Ker}\, u^{k-1} \subsetneq E$.

c) Montrer que, si E est de dimension finie n, alors $k \leq n$ (et donc $u^n = 0$).

5. Montrer que la famille $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, où $f_a : x \mapsto e^{ax}$.

6. Soit $\mathcal{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre, $\mathcal{A}'$ une sous-algèbre de dimension finie de $\mathcal{A}$ et a un élément de $\mathcal{A}'$, inversible dans $\mathcal{A}$. Montrer que a^{-1} appartient encore à $\mathcal{A}'$ *(on pourra utiliser l'application $x \mapsto a \times x \ldots$).*

7. © Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Établir que, pour tout sous-espace vectoriel E' de E,

$$\dim u(E') = \dim E' - \dim(E' \cap \mathrm{Ker}\, u).$$

8. © Dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, pour $r \leq \min(n,p)$, on note J_r la matrice $(a_{i,j})$ où $a_{i,j} = 1$ si $i = j \leq r$ et 0 sinon. Montrer qu'une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang r si et seulement s'il existe deux matrices carrées inversibles U, V telles que $UAV = J_r$.

9. © Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et F' (resp. G') un supplémentaire de $F \cap G$ dans F (resp. G). Montrer que : $F + G = (F \cap G) \oplus F' \oplus G'$.

10. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $f^3 = f^2 + 6f$; on pose

$$E_1 = \mathrm{Ker}\, f \ ; \quad E_2 = \mathrm{Ker}\,(f + 2\mathrm{Id}_E) \ ; \quad E_3 = \mathrm{Ker}\,(f - 3\mathrm{Id}_E).$$

Montrer que $E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$; exprimer f, puis f^k (pour $k \in \mathbb{N}$) en fonction de p_1, p_2, p_3, projecteurs associés à cette décomposition.

11. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et V un sous-espace vectoriel de E.
On pose $\mathcal{A} = \{u \in \mathcal{L}(E,F) \ / \ V \subset \mathrm{Ker}\, u\}$.
Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$ et calculer sa dimension.

12. © *Matrices de transvection et applications* : soit $n \geq 2$ et $(E_{i,j})$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

a) Montrer que, si i, j sont distincts dans $\mathbb{N}_n$ et α scalaire, $I_n + \alpha.E_{i,j} \in GL_n(\mathbb{K})$.

b) Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contient des matrices inversibles.

c) Montrer que : $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ / \ \forall M \in GL_n(\mathbb{K}) \quad AM = MA\} = \mathbb{K}.I_n$.

13. © Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1.
Montrer que H peut s'écrire comme le produit d'une matrice colonne par une matrice ligne.
En déduire que $H^2 = \mathrm{Tr}\, H.H$.

14. Soit f endomorphisme de E, $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, tel que $f^2 = \lambda f$ où $\lambda \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$. Comparer $\operatorname{rg} f$ et $\operatorname{Tr} f$.

15. Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \quad f(AB) = f(BA).$$

Montrer que f est proportionnelle à la trace.

16. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et G un sous-groupe de cardinal n de $GL(E)$. Établir :

$$\dim \bigcap_{g\in G} \operatorname{Ker}(g - \operatorname{Id}_E) = \frac{1}{n}\sum_{g\in G} \operatorname{Tr} g$$

(on pourra utiliser $p = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{g\in G} g$).

17. Soient n, p deux entiers naturels non nuls tels que $p < n$ et A, B deux matrices, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Montrer que le déterminant du produit AB est nul.

18. Soient $C_1, \ldots, C_n$ les vecteurs colonnes de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $(n \geq 2)$ et B la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les vecteurs colonnes sont les $D_j = \sum\limits_{k\neq j} C_k$, pour $k \in \mathbb{N}_n$. Calculer $\det B$ en fonction de $\det A$.

19. Montrer que, si A, B commutent dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $\det\left(A^2 + B^2\right) \geq 0$.

20. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $B = P^{-1}AP$. Montrer que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *(on pourra écrire $P = Q + iR$, $(Q,R) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$).*

21. © Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et, pour z dans $\mathbb{C}$, $A(z) = (a_{i,j} + z)$.
Montrer que la fonction $z \mapsto \det A(z)$ est polynomiale de degré inférieur ou égal à 1.

<u>*Application*</u> : pour a, b, c dans $\mathbb{C}$, calculer le déterminant d'ordre n : $\begin{vmatrix} a & b & \cdots & \cdots & b \\ c & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c & \cdots & c & a & b \\ c & \cdots & \cdots & c & a \end{vmatrix}$.

22. Calculer les déterminants :

$$\begin{vmatrix} (0) & & a_n \\ & \diagup & \\ a_1 & & (0) \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & & (0) \\ x & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & x \\ (0) & & x & 1+x^2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \cdots & \binom{n}{p} \\ \binom{n+1}{0} & \binom{n+1}{1} & \cdots & \binom{n+1}{p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n+p}{0} & \binom{n+p}{1} & \cdots & \binom{n+p}{p} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n \\ a_1 & 0 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & 0 & \ddots & & a_n \\ \vdots & \vdots & a_3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 0 \end{vmatrix}.$$

23. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $\deg P = n \geq 1$; on suppose qu'il existe $n+1$ rationnels $r_0, \ldots, r_n$ distincts tels que

$$\forall k \in \{0, \ldots, n\} \quad P(r_k) = q_k \in \mathbb{Q}.$$

Montrer que $P \in \mathbb{Q}[X]$.

24. Calculer le déterminant de l'endomorphisme τ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui à M associe ${}^tM$.