T.D. 0 – Synchronisation et mise en route

1. © <u>*Combinaisons avec répétitions*</u> : étant donné un ensemble E de cardinal n et un entier naturel p, on connaît le nombre A_n^p d'*arrangements* p à p (ou p-*listes*) d'éléments distincts de E (dans une liste, l'ordre a de l'importance...) et le nombre $\binom{n}{p}$ de *combinaisons* p à p d'éléments distincts de E (sans tenir compte de l'ordre ; c'est aussi le nombre de parties de cardinal p de E, jadis noté C_n^p).

$$\text{Si} \quad 0 \leq p \leq n, \quad A_n^p = n(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}, \text{ sinon } A_n^p = 0 \quad \text{et} \quad \binom{n}{p} = C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}.$$

Le but de l'exercice est de déterminer le nombre Γ_n^p de combinaisons p à p d'éléments de E **avec répétitions éventuelles**. Par exemple, le nombre de pièces dans un jeu de dominos est Γ_7^2.

a) Pour n et p dans $\mathbb{N}^*$, établir : $\Gamma_n^p = \Gamma_{n-1}^p + \Gamma_n^{p-1}$.

b) En déduire : $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^{*2} \quad \Gamma_n^p = C_{n+p-1}^p$ *(on pourra procéder par récurrence sur $n+p$, en donnant un sens à cette idée...).*

c) Montrer que Γ_n^p est aussi le nombre de n-uplets d'entiers naturels dont la somme vaut p.

2. © Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E ; pour tout x de E, on rappelle que la *classe d'équivalence de* x est l'ensemble $\pi(x)$ des éléments de E en relation avec x : $\pi(x) = \{y \in E \ / \ x\mathcal{R}y\}$. On appelle *ensemble quotient de E par $\mathcal{R}$* l'ensemble, noté $E/\mathcal{R}$, des classes d'équivalences des éléments de E. On dispose donc de l'application $\pi : E \to E/\mathcal{R}$, appelée *surjection canonique.*

a) Montrer que $E/\mathcal{R}$ est une partition de E (*i.e.* un ensemble de parties de E, non vides, disjointes deux à deux et dont la réunion est E). Qu'en déduit-on lorsque E est un ensemble fini ?

b) Soit $(G, \cdot)$ un groupe et H un sous-groupe de G. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie sur G par :

$$\forall (x,y) \in G^2 \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^{-1}y \in H$$

est une relation d'équivalence sur G. Décrire la classe d'équivalence d'un élément x de G. En déduire que tout élément γ de $G/\mathcal{R}$ est équipotent à H (*i.e.* il existe une bijection entre γ et H).

c) Dans un groupe **fini** $(G, \cdot)$, établir les propriétés suivantes :

* le cardinal de tout sous-groupe de G est un diviseur de $\operatorname{Card} G$ (*théorème de Lagrange*) ;
* si f est un morphisme de $(G, \cdot)$ dans un autre groupe $(G', \cdot)$, alors

$$\operatorname{Card} \operatorname{Ker} f \times \operatorname{Card} \operatorname{Im} f = \operatorname{Card} G.$$

3. © Montrer que la réunion de deux sous-groupes d'un groupe $(G, \cdot)$ en est encore un sous-groupe si et seulement si l'un des deux est inclus dans l'autre.

4. Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F. Montrer que :

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{P}(E) \quad f(E \backslash A) \subset F \backslash f(A).$$

Peut-on établir des caractérisations analogues de f surjective, f bijective ?

5. © <u>*Éléments nilpotents d'un anneau*</u> : soit $(A, +, \times)$ un anneau ; un élément x de A est dit *nilpotent* si et seulement s'il existe k dans $\mathbb{N}$ tel que $x^k = 0$.

a) Montrer que, si x est nilpotent, alors $1 - x$ est inversible et préciser son inverse.

b) Soient a et b des éléments de A, montrer que si ab est nilpotent, alors ba est nilpotent.

Montrer que si a et b sont nilpotents et commutent, alors $a + b$ est nilpotent.

6. © $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$ et $(y_k)_{1 \leq k \leq n}$ étant deux familles d'éléments d'un anneau commutatif A, établir :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \right)^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i y_j - x_j y_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} y_j^2 \right) \qquad \textit{(identité de Lagrange).}$$

Interpréter dans les cas $n = 2$ et $n = 3$.

7. <u>*Anneau des entiers de Gauss*</u> : soit $\mathbb{Z}[i] = \{u + iv,\ (u,v) \in \mathbb{Z}^2\}$. Montrer que $(\mathbb{Z}[i], +, \times)$ est un anneau et que :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{Z}[i]^2 \quad b \neq 0 \Rightarrow \exists (q,r) \in \mathbb{Z}[i]^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} a = bq + r \\ |r| < |b| \end{array} \right.$$

(on pourra utiliser le nombre complexe a/b). Le couple (q,r) est-il unique ?

8. Soient $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$; résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z : $(z+1)^n = e^{2int}$.

En déduire des expressions simples de $f_n(t) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(t + \frac{k\pi}{n}\right)$ et de $p_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}$.

9. À quelle condition $P = aX^n + bX^{n-1} + 1$ est-il divisible par $(X+1)^2$?

10. Déterminer les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant : $P(X^2) = P(X)\,P(X+1)$
(on pourra s'intéresser aux racines de P dans $\mathbb{C}$).

11. Montrer que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, il existe un polynôme réel P_n tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad P_n\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^n + \frac{1}{x^n}.$$

12. Soient u et v les racines de $X^2 - X + \frac{1}{10}$. Montrer que, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_5[X]$,

$$\int_0^1 P(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{18}\left[5P(u) + 8P\left(\frac{1}{2}\right) + 5P(v)\right].$$