

Exercice

- 1) Manifestement, l'énoncé suppose $N(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ (c'est presque sûr !) et $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

La variable aléatoire N compte le nombre d'essais avant le premier succès (pile), elle suit donc **la loi géométrique de paramètre p** .

$$\forall n \geq 1 \quad P(N = n) = (1-p)^{n-1}p.$$

Sachant que $N = n$ (avec $n \geq 1$ fixé), on compte le nombre de piles au cours de n lancers, il s'agit de **la loi binomiale de paramètres n et p** .

$$P(X = k \mid N = n) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{si } k \in \llbracket 0, n \rrbracket \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

- 2) Pour $n \geq 1$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, j'applique la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} P(N = n, X = k) &= P(X = k, N = n) \\ &= P(X = k \mid N = n) \times P(N = n) \\ &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \times (1-p)^{n-1} p \end{aligned}$$

Soit, avec la convention habituelle $\binom{n}{k} = 0$ si $k \notin \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\forall (n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \quad P(N = n, X = k) = \binom{n}{k} p^{k+1} (1-p)^{2n-k-1}.$$

- 3) En écrivant $f(x)$ sous la forme $(1-x)^{-1}$, il vient par récurrence immédiate, pour $x \in]-1, 1[$ et $k \in \mathbb{N}$,

$$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$$

En dérivant k fois le développement en série entière suivant sur **l'intervalle ouvert de convergence** $]-1, 1[$,

$$\forall x \in]-1, 1[\quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n,$$

j'obtiens

$$\forall x \in]-1, 1[\quad \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1) \times \dots \times (n-k+1) x^{n-k}$$

ou encore

$$\forall x \in]-1, 1[\quad \frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \sum_{m=0}^{+\infty} \binom{m+k}{k} x^m.$$

- 4) En utilisant le système (quasi-)complet d'événements $((N = n))_{n \geq 1}$, j'ai pour tout $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = k, N = n) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} P(X = k, N = n) \text{ car pour } n < k, \text{ la proba. est nulle et que } k \geq 1 \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^{k+1} (1-p)^{2n-k-1} = p^{k+1} \times (1-p)^{k-1} \times \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} (1-p)^{2(n-k)} \\ &= p^{k+1} \times (1-p)^{k-1} \times \frac{1}{(1-(1-p)^2)^{k+1}} \text{ grâce au } \mathbf{3} \\ &= p^{k+1} \times (1-p)^{k-1} \times \frac{1}{p^{k+1}(2-p)^{k+1}} \end{aligned}$$

Par ailleurs, pour $k = 0$,

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = 0, N = n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n}{0} p^1 (1-p)^{2n-1} \text{ (subtile différence car } n = k = 0 \text{ est exclu)} \\ &= p(1-p) \sum_{m=0}^{+\infty} (1-p)^{2m} = \frac{p(1-p)}{1-(1-p)^2} = \frac{1-p}{2-p} \end{aligned}$$

En conclusion

$$P(X = 0) = \frac{(1-p)}{(2-p)} \quad \text{et} \quad \forall k \geq 1 \quad P(X = k) = \frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}}.$$

5) a) D'après le cours, les variables aléatoires U et V étant indépendantes, j'ai

$$E(Y) = E(UV) = E(U) \times E(V) = \lambda \times \frac{1}{\lambda}$$

Soit

$$E(Y) = 1.$$

b)

$$\begin{aligned} P(Y = 0) &= P((U = 0) \cup (V = 0)) \\ &= P(U = 0) \text{ car } P(V = 0) = 0 \\ &= 1 - \lambda. \end{aligned}$$

Pour $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= P(Y = k, U = 0) + P(Y = k, U = 1) \\ &= 0 + P(Y = k | U = 1) \times P(U = 1) = (1 - \lambda)^{k-1} \lambda^2. \end{aligned}$$

$$P(Y = 0) = 1 - \lambda \quad \text{et} \quad \forall k \geq 1 \quad P(Y = k) = (1 - \lambda)^{k-1} \lambda^2.$$

c) Je note \mathbb{V} la variance pour éviter les confusions. J'ai

$$\mathbb{V}(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$$

Or $U^2 = U$ et V^2 sont indépendantes, donc

$$E(Y^2) = E(U^2 V^2) = E(U^2) \times E(V^2) = E(U) \times E(V^2) = \lambda \times E(V^2)$$

Et je connais la variance pour une loi géométrique :

$$\mathbb{V}(V) = \frac{1-\lambda}{\lambda^2} = E(V^2) - E(V)^2 = E(V^2) - \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\text{donc } E(V^2) = \frac{2-\lambda}{\lambda^2} \text{ d'où } E(Y^2) = \frac{2-\lambda}{\lambda} \text{ et donc } \mathbb{V}(Y) = \frac{2-\lambda}{\lambda} - 1.$$

$$\mathbb{V}(Y) = 2 \left(\frac{1}{\lambda} - 1 \right).$$

6) En posant λ tel que $1 - \lambda = \frac{1-p}{2-p}$ c'est-à-dire $\lambda = \frac{1}{2-p}$, je constate que

$$P(Y = 0) = \frac{1-p}{2-p} \quad \text{et, pour } k \geq 1, \quad P(Y = k) = (1 - \lambda)^{k-1} \lambda^2 = \frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}}.$$

donc finalement

$$X \text{ et } Y \text{ ont même loi.}$$

Problème

I – Étude d'une suite récurrente

I.A.1) f est croissante et $u_0 = 0 \leq u_1$, donc une récurrence immédiate montre que $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout n , c'est-à-dire que (u_n) est croissante ; de plus elle est majorée par 1, donc elle converge.

I.A.2) L'application $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - x$ est continue avec $g(1) = 0$. g étant continue sur $[0, 1]$, alors $\{x \in [0, 1] \mid f(x) = x\} = g^{-1}(\{0\})$ est une partie de \mathbb{R} fermée, bornée et non vide donc admet un plus petit élément x_f (une borne inférieure qui appartient à l'ensemble car il est fermé).

I.A.3) J'ai $u_0 \leq x_f$, d'où $u_n \leq x_f$ pour tout n , par récurrence puisque f est croissante et $f(x_f) = x_f$. Par passage à la limite, j'en déduis $\ell \leq x_f$; or, f étant continue, ℓ est un point fixe de f (par unicité de la limite, puisque la sous-suite (u_{n+1}) converge aussi vers ℓ et $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$). Comme x_f est le plus petit point fixe de f , j'ai finalement

$$\boxed{\ell = x_f.}$$

I.B) On suppose que $m > 1$. Alors la fonction g ci-dessus est \mathcal{C}^1 et vérifie $g(1) = 0$ et $g'(1) = m - 1 > 0$. Donc je dispose de $x \in]0, 1[$ tel que $g(x) < 0$ (sinon les taux de variation $\frac{g(x) - g(1)}{x - 1}$ seraient tous négatifs ou nuls et donc $g'(1)$ aussi). Comme $g(0) = f(0) \geq 0$ et g continue, le théorème des valeurs intermédiaires montre que g s'annule en au moins un point de $[0, x]$, c'est-à-dire que f admet un point fixe dans $[0, x]$. Or $x < 1$ et x_f est le plus petit point fixe de f , donc

$$\boxed{x_f \in [0, 1[.}$$

I.C) On suppose ici que $m \leq 1$. Supposons par l'absurde que $x_f < 1$.

D'après le théorème de Rolle, je dispose de $c \in]x_f, 1[$ tel que $g'(c) = 0$, c'est-à-dire $f'(c) = 1$. Or f' est positive et croissante par hypothèse, donc $m = 1$ et f' constante sur $[c, 1]$, ce qui est absurde car $f''(1) > 0$. D'où $x_f = 1$ et par conséquent g ne s'annule qu'en 1. Donc : $\forall x \in [0, 1[\quad f(x) > x$ (car $g(0) \geq 0$ et g continue).

Supposons un instant $x \in [0, 1[$ tel que $f(x) = 1$; comme f est croissante et à valeurs dans $[0, 1]$, j'aurais alors f constante sur $[x, 1]$ ce qui contredit à nouveau le fait que $f''(1) > 0$. Par conséquent : $\forall x \in [0, 1[\quad f(x) < 1$.

Comme $u_0 < 1$, une récurrence banale montre alors que pour tout n , $u_n < 1$.

$$\boxed{x_f = 1 \text{ et, pour tout } n, u_n < 1.}$$

I.D) Dans cette question, on suppose que $m = 1$.

I.D.1) On a posé pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n = 1 - u_n$. D'après la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \varepsilon_n > 0$. De plus, f étant \mathcal{C}^2 , la formule de Taylor en 1 me donne, comme $f'(1) = m$,

$$-\varepsilon_{n+1} = f(u_n) - f(1) = m(u_n - 1) + \frac{f''(1)}{2}(u_n - 1)^2 + o((u_n - 1)^2)$$

or ici $m = 1$: $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n - \frac{f''(1)}{2}\varepsilon_n^2 + o(\varepsilon_n^2)$. D'où

$$\frac{1}{\varepsilon_{n+1}} - \frac{1}{\varepsilon_n} = \frac{1}{\varepsilon_n - \frac{f''(1)}{2}\varepsilon_n^2 + o(\varepsilon_n^2)} - \frac{1}{\varepsilon_n} = \frac{1}{\varepsilon_n} \left(\frac{1}{1 - \frac{f''(1)}{2}\varepsilon_n + o(\varepsilon_n)} - 1 \right) = \frac{f''(1)}{2} + o(1).$$

En conclusion

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\varepsilon_{n+1}} - \frac{1}{\varepsilon_n} \right) = \frac{f''(1)}{2}.}$$

I.D.2) D'après le lemme de Cesàro appliqué à la suite de la question précédente :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{\varepsilon_{k+1}} - \frac{1}{\varepsilon_k} \right) = \frac{f''(1)}{2}$$

or après l'hécatombe

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{\varepsilon_{k+1}} - \frac{1}{\varepsilon_k} \right) = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\varepsilon_n} - \frac{1}{\varepsilon_0} \right) \sim \frac{1}{n\varepsilon_n}$$

car la constante $\frac{1}{\varepsilon_0}$ est négligeable devant $\frac{1}{\varepsilon_n}$ qui tend vers l'infini. En conclusion, comme $f''(1)$ est non nul,

$$\varepsilon_n = 1 - u_n \sim \frac{2}{nf''(1)}.$$

I.E) Dans cette question, on suppose que $m < 1$. D'après **I.C)** $\forall n \in \mathbb{N} \quad \varepsilon_n > 0$.

I.E.1) Le développement du **I.D.1** donne $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = m \in [0, 1[$; alors, d'après la règle de d'Alembert,

La série de terme général ε_n est absolument convergente.

Notons que $m = f'(1)$ ne peut pas être nul, puisque f' est positive et strictement croissante au voisinage de 1, selon l'hypothèse $f''(1) > 0$ et par continuité de f'' . Ainsi $m \in]0, 1[$ et le développement du **I.D.1** donne

$$\varepsilon_{n+1} = m\varepsilon_n - \frac{f''(1)}{2}\varepsilon_n^2 + o(\varepsilon_n^2) \quad \text{d'où} \quad \frac{\varepsilon_{n+1}}{m\varepsilon_n} = 1 - \frac{f''(1)}{2}\varepsilon_n.$$

Comme $f''(1)$ est non nul, il en résulte que

$$\ln \left(\frac{m^{-(n+1)}\varepsilon_{n+1}}{m^{-n}\varepsilon_n} \right) = \ln \left(\frac{\varepsilon_{n+1}}{m\varepsilon_n} \right) \sim -\frac{f''(1)}{2}\varepsilon_n.$$

Or nous venons de voir que $\sum \varepsilon_n$ est absolument convergente, donc

La série de terme général $\ln \left(\frac{m^{-(n+1)}\varepsilon_{n+1}}{m^{-n}\varepsilon_n} \right)$ est absolument convergente.

I.E.2) Ainsi la série de terme général $\ln(m^{-(n+1)}\varepsilon_{n+1}) - \ln(m^{-n}\varepsilon_n)$ converge; par télescopage il en résulte que la suite de terme général $w_n = \ln(m^{-n}\varepsilon_n)$ converge vers un certain réel w ; alors par continuité de la fonction exponentielle, la suite de terme général $m^{-n}\varepsilon_n$ converge vers $c = e^w > 0$. D'où l'existence d'un réel $c > 0$ tel que :

$$\varepsilon_n = 1 - u_n \sim c.m^n.$$

II – Formule de Wald

II.A.1) X et Y étant deux variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N} indépendantes, j'ai

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad P(X + Y = k) = \sum_{j=0}^k P(X = j, Y = k - j) = \sum_{j=0}^k P(X = j)P(Y = k - j).$$

Par conséquent, la série entière G_{X+Y} est le produit de Cauchy des séries entières G_X et G_Y (nous avons convergence absolue en tout point de $[-1, 1]$). En conclusion

$$G_{X+Y} = G_X G_Y.$$

Noter que c'est une question de cours que l'on peut aussi traiter en considérant $E(t^{X+Y}) \dots$

II.A.2) Noter que l'énoncé admet le "lemme des coalitions", ce qui permet d'appliquer le résultat précédent dans une récurrence banale; or les X_k ont toutes comme fonction génératrice G_X et $S_0 = 0$, donc $G_{S_0} = 1$ pour l'initialisation :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad G_{S_k} = (G_X)^k.$$

II.A.3) À nouveau, l'énoncé admet que T est indépendante de S_k pour tout k . Soit $t \in [0, 1]$; comme $((T = k))_{k \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, j'ai

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P(S = n) = \sum_{k=0}^{\infty} P(S = n, T = k),$$

d'où

$$G_S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} P(S = n, T = k) t^n \right).$$

Or la relation $S(\omega) = S_{T(\omega)}(\omega)$ pour tout ω de Ω montre l'égalité des événements :

$$\forall (n, k) \in \mathbb{N}^2 \quad (S = n, T = k) = (S_k = n, T = k).$$

Comme S_k et T sont indépendantes, j'ai

$$G_S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} P(S_k = n) P(T = k) t^n \right).$$

Fixons maintenant $K \in \mathbb{N}$. Je fais apparaître somme partielle et reste de la série (convergente !) dont la somme est dans la parenthèse ci-dessus :

$$G_S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^K P(S_k = n) P(T = k) t^n + \sum_{k=K+1}^{\infty} P(S_k = n) P(T = k) t^n \right).$$

En présence de la somme d'une série convergente, de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} (u_n + v_n)$, il suffit de constater que $\sum u_n$ converge pour conclure que $\sum v_n$ converge également, puisque $v_n = (u_n + v_n) - u_n$! Or, pour k fixé, grâce au **II.A.2**,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} P(S_k = n) P(T = k) t^n &= P(T = k) \sum_{n=0}^{\infty} P(S_k = n) t^n \\ &= P(T = k) G_{S_k}(t) = P(T = k) G_X(t)^k \end{aligned}$$

donc, s'agissant d'une somme **finie** de séries convergentes, la série de gauche ci-dessus converge et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^K P(S_k = n) P(T = k) t^n \right) = \sum_{k=0}^K P(T = k) G_X(t)^k.$$

Le programme de PSI ne permet pas d'intervertir les deux sommes **infinies** de droite, mais j'ai bien montré

$$G_S(t) = \sum_{k=0}^K P(T = k) G_X(t)^k + R_K \text{ où } R_K = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=K+1}^{\infty} P(T = k) P(S_k = n) t^n \right).$$

II.A.4) Avec $t \in [0, 1[$ et $K \in \mathbb{N}$ fixés, R_K apparaît comme la somme d'une série à termes positifs, donc $R_K \geq 0$. Puis, en majorant $P(S_k = n)$ par 1, j'obtiens

$$\forall k \geq K+1 \quad \sum_{n=0}^{\infty} P(T = k) P(S_k = n) t^n \leq t^n \sum_{n=0}^{\infty} P(T = k)$$

d'où puisqu'ici $|t| < 1$ et $\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$,

$$0 \leq R_K \leq \frac{1}{1-t} \sum_{k=K+1}^{\infty} P(T = k).$$

II.A.5) $\sum_{k=K+1}^{\infty} P(T = k)$ est le reste d'une série convergente, donc tend vers 0 quand K tend vers l'infini.

Alors ce qui précède montre que $\sum P(T = k) G_X(t)^k$ converge et a pour somme $G_S(t)$. Autrement dit

$$G_S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P(T = k) G_X(t)^k = G_T(G_X(t)) = (G_T \circ G_X)(t)$$

cela pour tout t de $[0, 1[$. Ainsi, $G_T \circ G_X$ est la fonction somme d'une série entière qui coïncide avec G_S sur $[0, 1[$. D'après le résultat rappelé en préambule, j'en déduis

$$G_S = G_T \circ G_X.$$

II.B) On suppose ici que T et les X_n sont d'espérance finie. G_X et G_T sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$. Alors $G_S = G_T \circ G_X$ est aussi de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$, donc S admet une espérance finie, donnée par

$$E(S) = G'_S(1) = G'_T \circ G_X(1). G'_X(1) = G'_T(1) G'_X(1).$$

Autrement dit

$$E(S) = E(T)E(X_1).$$

II.C.1) Si T suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, sa loi est donnée par : $P(T = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

D'où sa fonction génératrice

$$G_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} t^k = e^{(t-1)\lambda}.$$

II.C.2) Ici $T \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et pour tout i , $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(\alpha)$ (loi de Bernoulli). Or le nombre d'insectes issus de la ponte est modélisé par la variable aléatoire S comme ci-dessus. Donc

$$\forall t \in [-1, 1] \quad G_S(t) = G_T(G_X(t)) = G_T(1 - \alpha + \alpha t) = e^{(-\alpha + \alpha t)\lambda} = e^{(t-1)\alpha\lambda}.$$

Je reconnais la fonction génératrice associée à la loi de Poisson de paramètre $\alpha\lambda$. Or la fonction génératrice caractérise la loi :

Le nombre d'insectes issus de la ponte suit la loi de Poisson de paramètre $\alpha\lambda$.

III – Processus de Galton-Watson

III.A.1) Pour n fixé, nous sommes exactement dans la situation de la partie précédente, avec Y_n à la place de T et $X_{n,i}$ à la place de X_i . Toutes les hypothèses d'indépendance étant vérifiées, le résultat du **II.A** donne :

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n \circ f.$$

III.A.2) De même, d'après le **II.B**, $E(Y_{n+1}) = E(Y_n)E(X)$ où X suit la loi μ , d'où par une récurrence immédiate, comme $E(Y_0) = 1$ et $E(X) = m$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad E(Y_n) = m^n.$$

III.A.3a) Par définition, l'événement "il y a extinction" est $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (Y_n = 0)$; or par définition de Y_{n+1}

$$\forall \omega \in \Omega \quad Y_n(\omega) = 0 \Rightarrow Y_{n+1}(\omega) = 0$$

donc la suite d'événements $((Y_n = 0))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Ainsi, par continuité croissante de P ,

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (Y_n = 0)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(Y_n = 0).$$

Or, par définition de la fonction génératrice, pour tout n , $P(Y_n = 0) = \varphi_n(0)$. Au final

La probabilité d'extinction est $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(0)$.

III.A.3b) f est la fonction génératrice de la loi μ qui admet une espérance et une variance, donc f est de classe \mathcal{C}^2 sur $[0, 1]$; les dérivées première et seconde de f sur $[0, 1]$ s'obtiennent par dérivation terme à terme d'une série entière dont tous les coefficients sont positifs, donc f' et f'' sont à valeurs positives. De même pour f , qui est en outre à valeurs dans $[0, 1]$ puisque, pour $t \in [0, 1]$, $f(t)$ est majoré par $f(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$. De plus $f'(0) = p_1 < 1$ puisque $p_0 + p_1 < 1$ par hypothèse. Et enfin

$$f''(1) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k > 0$$

car il existe $k \geq 2$ tel que $p_k > 0$, selon la même hypothèse.

Donc f vérifie toutes les hypothèses de la partie **I**.

Or $\varphi_0 = \text{Id}_{[0,1]}$ et le **III.A.1** montre par une récurrence immédiate que $\varphi_n = f \circ \dots \circ f$ (n fois). Il en résulte, par associativité de la loi \circ , que f et φ_n commutent. Ainsi la relation du **III.A.1** (qui semblait à l'envers !) s'écrit aussi $\varphi_{n+1} = f \circ \varphi_n$. En particulier la valeur en 0 montre que la suite $(\varphi_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence de la partie **I**. En conclusion

On peut appliquer les résultats de la partie **I** à la suite $(\varphi_n(0))_{n \geq 0}$.

III.A.4) Si $m \leq 1$, d'après **I.C** $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(0) = 1$:

Si $m \leq 1$, la probabilité d'extinction est égale à 1.

III.B.1) Pour tout entier non nul k , $(T = k) \subset (Y_{k-1} \geq 1)$ donc

$$0 \leq kP(T = k) \leq kP(Y_{k-1} \geq 1) = k(1 - \varphi_{k-1}(0)).$$

Or ici $m < 1$, donc d'après **I.E** je dispose de $c > 0$ tel que $1 - \varphi_{k-1}(0) \sim c.m^{k-1}$. Et la série de terme général km^{k-1} converge (en tant que $O(1/k^2)$ car $k^3 m^{k-1} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ par croissances comparées). Il en résulte que $\sum kP(T = k)$ converge absolument. Autrement dit

T admet une espérance.

III.B.2a) J'ai par σ -additivité, pour n fixé,

$$P(Y_n \geq 1) = \sum_{k=1}^{\infty} P(Y_n = k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} kP(Y_n = k) = E(Y_n),$$

d'où grâce au **III.A.2** (il s'agit d'un cas particulier de l'inégalité de Markov !)

$$\boxed{P(Y_n \geq 1) \leq m^n.}$$

III.B.2b) En particulier j'ai $m \leq 1$, donc d'après le **III.A.4** la probabilité d'extinction vaut 1, c'est-à-dire que $P(T = -1) = 0$. Par conséquent $E(T) = \sum_{k=1}^{\infty} kP(T = k)$, ce qui nous ramène à un résultat du cours, puisque tout se passe comme si T était à valeurs dans \mathbb{N} :

$$E(T) = \sum_{k=1}^{\infty} P(T \geq k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(T > k - 1)$$

soit par réindexation

$$\boxed{E(T) = \sum_{k=0}^{\infty} P(T > k).}$$

III.B.2c) Notons que, par définition, $(T > k) = (Y_k \geq 1)$, d'où grâce au **III.B.2a**

$$P(T > k) = P(Y_k \geq 1) \leq m^k$$

Le **III.B.2b** donne alors

$$E(T) = \sum_{k=0}^{\infty} P(T > k) \leq \sum_{k=0}^{\infty} m^k$$

d'où la majoration

$$\boxed{E(T) \leq \frac{1}{1-m}.}$$

III.C.1) Comme $m \leq 1$, nous avons vu au **III.A.4** que $P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (Y_n = 0)\right) = 1$.

$$\boxed{Z \text{ est définie presque sûrement (sur un ensemble de probabilité 1).}}$$

III.C.2a) Fixons $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme Y_n est à valeurs dans \mathbb{N} ,

$$Z_{n+1} = Z_n + Y_{n+1} \geq Z_n \quad \text{d'où} \quad (Z_{n+1} \leq k) \subset (Z_n \leq k).$$

Donc, par continuité décroissante,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n \leq k) = P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (Z_n \leq k)\right).$$

Précisons cette dernière valeur : soit $\omega \in \Omega$;

- si $Z_n(\omega) \leq k$ pour tout k dans \mathbb{N} , alors $Z(\omega) \leq k$ par passage à la limite, par définition de Z ;
- si $Z(\omega) \leq k$, alors, pour tout k dans \mathbb{N} , $Z_n(\omega) \leq k$ (car $Z_n \leq Z$ du fait que les Y_i sont à valeurs dans \mathbb{N}).

Par double inclusion, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (Z_n \leq k) = (Z \leq k)$ et finalement

$$\boxed{\text{La suite } (P(Z_n \leq k))_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } P(Z \leq k).}$$

III.C.2b) Soit k fixé dans \mathbb{N} . Pour tout n dans \mathbb{N} , comme Z_n est à valeurs dans \mathbb{N} , j'ai

$$P(Z_n = k) = P(Z_n \leq k) - P(Z_n \leq k - 1),$$

d'où, par passage à la limite grâce au **III.C.2a**,

$$\boxed{(P(Z_n = k))_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge vers } P(Z = k), \text{ cela pour tout } k \text{ dans } \mathbb{N}.}$$

III.C.2c) Fixons $K \in \mathbb{N}$ et $s \in [0, 1[$. J'ai (toutes les séries convergent absolument)

$$\begin{aligned} |G_{Z_n}(s) - G_Z(s)| &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} (P(Z_n = k) - P(Z = k)) s^k \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} |P(Z_n = k) - P(Z = k)| s^k \end{aligned}$$

Je découpe la somme. Pour les indices $k \leq K$, je majore s^k par 1 (la somme est finie et cela ne pose pas de problème d'existence). Pour $k \geq K + 1$, je remarque que $|P(Z_n = k) - P(Z = k)| \leq 1$ (car les deux termes sont entre 0 et 1 et leur différence est donc entre -1 et 1). Comme $\sum s^k$ converge, il n'y a à nouveau pas de problème d'existence. J'obtiens

$$|G_{Z_n}(s) - G_Z(s)| \leq \sum_{k=0}^K |P(Z_n = k) - P(Z = k)| + \sum_{k=K+1}^{\infty} s^k$$

soit finalement, connaissant la somme d'une série géométrique :

$$|G_{Z_n}(s) - G_Z(s)| \leq \sum_{k=0}^K |P(Z_n = k) - P(Z = k)| + \frac{s^{K+1}}{1-s}.$$

III.C.2d) Style Cesàro... Fixons $s \in [0, 1[$ et $\varepsilon > 0$. $\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{s^{K+1}}{1-s} = 0$, je dispose donc de K dans \mathbb{N} tel que : $\frac{s^{K+1}}{1-s} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. K étant ainsi fixé, d'après **III.C.2b**, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^K |P(Z_n = k) - P(Z = k)| = 0$ (somme finie de suites de limite nulle), d'où N dans \mathbb{N} tel que :

$$\forall n \geq N \quad \sum_{k=0}^K |P(Z_n = k) - P(Z = k)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Finalement : $\forall n \geq N \quad |G_{Z_n}(s) - G_Z(s)| \leq \varepsilon$. Autrement dit, par définition de la limite, la suite $(G_{Z_n}(s))$ converge vers $G_Z(s)$, cela pour tout s de $[0, 1[$. De plus : $\forall n \in \mathbb{N} \quad G_{Z_n}(1) = G_Z(1) = 1$, donc le résultat subsiste pour $s = 1$. En conclusion

$$\boxed{\text{La suite } (G_{Z_n})_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge simplement vers } G_Z \text{ sur } [0, 1].}$$

III.C.3a) J'ai $Z_1 = 1 + Y_1$ et la variable aléatoire constante X égale à 1 est trivialement indépendante de Y_1 . Donc le **II.A.1** s'applique et, comme $G_X(s) = s$ et $G_{Y_1} = \varphi_1 = f$,

$$\boxed{G_{Z_1}(s) = s f(s)}.$$

III.C.3b) Avec le résultat admis et le **III.C.2d**, il suffit de passer à la limite, pour s fixé dans $[0, 1[$, puisque f est continue.

$$\boxed{G_Z(s) = s \cdot f(G_Z(s))}.$$

III.C.3c) Comme toute fonction génératrice, G_Z et f sont \mathcal{C}^1 sur $[0, 1[$ et le résultat précédent donne

$$\forall s \in [0, 1[\quad G'_Z(s) = f(G_Z(s)) + s \cdot f'(G_Z(s)) \cdot G'_Z(s)$$

soit $[1 - s \cdot f'(G_Z(s))] \cdot G'_Z(s) = f(G_Z(s))$

or f et G_Z sont continues sur $[0, 1]$, de valeur 1 en 1 ; de plus on a supposé que les variables aléatoires de loi μ admettent pour espérance m , donc f est \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$, or $f'(1) = m$, d'où

$$1 - s \cdot f'(G_Z(s)) \xrightarrow{s \rightarrow 1} 1 - m \quad \text{et} \quad f(G_Z(s)) \xrightarrow{s \rightarrow 1} 1.$$

De plus, comme f' et G_Z sont croissantes sur $[0, 1]$ et $f'(1) > 0$ (cf. **I.E.1**),

$$\forall s \in [0, 1[\quad s \cdot f'(G_Z(s)) < f'(1) = m \quad \text{donc} \quad 1 - s \cdot f'(G_Z(s)) > 1 - m.$$

Alors, si $m < 1$, $1 - s \cdot f'(G_Z(s))$ ne s'annule pas et

$$G'_Z(s) = \frac{f(G_Z(s))}{1 - s \cdot f'(G_Z(s))} \xrightarrow{s \rightarrow 1} \frac{1}{1 - m},$$

donc, par le théorème de la limite de la dérivée, G_Z est dérivable en 1, donc Z admet une espérance valant $G'_Z(1) = \frac{1}{1 - m}$.

Par contre, si $m = 1$,

$$G'_Z(s) = \frac{f(G_Z(s))}{1 - s \cdot f'(G_Z(s))} \xrightarrow{s \rightarrow 1} +\infty$$

et donc G_Z n'est pas dérivable en 1. En conclusion

$$\boxed{Z \text{ est d'espérance finie si et seulement si } m < 1, \text{ auquel cas } E(Z) = \frac{1}{1 - m}.}$$

IV – Un exemple

Notons que les p_k vérifient bien les hypothèses de la partie III.

$$\text{IV.A)} \text{ Ici } f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t}{2}\right)^k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-t/2} = \frac{1}{2-t} \text{ et } f'(t) = \frac{1}{(2-t)^2}.$$

$$f(t) = \frac{1}{2-t} \text{ et } m = f'(1) = 1.$$

IV.B) J'ai $f([0, 1]) = [0, 1[$ et par récurrence immédiate, grâce au III.A.1, $\varphi_n([0, 1]) = [0, 1[$.
En particulier,

$$\text{Pour tout } t \in [0, 1[, \varphi_n(t) \neq 1.$$

IV.C) Soit $t \in [0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$ fixés ; par définition $a_n(t) = \frac{1}{\varphi_n(t) - 1}$ d'où

$$\begin{aligned} a_{n+1}(t) &= \frac{1}{\varphi_{n+1}(t) - 1} = \frac{1}{\frac{1}{2 - \varphi_n(t)} - 1} = \frac{2 - \varphi_n(t)}{-1 + \varphi_n(t)} \\ &= -1 + \frac{1}{\varphi_n(t) - 1} = a_n(t) - 1 \end{aligned}$$

$$\text{Pour } t \in [0, 1[, \text{ la suite } (a_n(t))_{n \in \mathbb{N}} \text{ est arithmétique de raison } -1.$$

IV.D) Fixons $t \in [0, 1[$; d'après le résultat précédent,

$$a_n(t) = a_0(t) - n = \frac{1}{t-1} - n = \frac{n+1-nt}{t-1}$$

d'où

$$\varphi_n(t) = 1 + \frac{1}{a_n(t)} = 1 + \frac{t-1}{n+1-nt}.$$

J'obtiens bien

$$\varphi_n(t) = \frac{n + (1-n)t}{1 + n - nt}.$$

IV.E) La loi de Y_n se déduira du développement en série entière de φ_n . Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, 1[$; forçons la chance (il s'agit en fait d'une division euclidienne) :

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{n} \frac{n^2 + (n-1)(-nt + n+1) - (n-1)(n+1)}{1 + n - nt} = \frac{1}{n} \left(n - 1 + \frac{1}{1 + n - nt} \right)$$

et, comme $\left| \frac{nt}{n+1} \right| < 1$,

$$\frac{1}{1 + n - nt} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{nt}{n+1} \right)^k$$

d'où, en regroupant les termes constants,

$$\varphi_n(t) = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^k t^k.$$

En conclusion, par identification des coefficients,

$$P(Y_n = 0) = \frac{n}{n+1} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(Y_n = k) = \frac{n^{k-1}}{(n+1)^{k+1}}.$$

Notons que ces valeurs sont également correctes pour $n = 0$ (car $Y_0 = 1$).

IV.F) Comme nous l'avons vu au III.B.2c, $(T > n) = (Y_n \geq 1)$, d'où

$$P(T > n) = P(Y_n \geq 1) = 1 - P(Y_n = 0)$$

soit d'après le résultat précédent

$$P(T > n) = \frac{1}{n+1}.$$

Donc la série $\sum P(T > n)$ diverge (série harmonique). Le cours nous apprend qu'alors T n'est pas d'espérance finie. Retrouvons ce résultat (moins classique que la réciproque. . .) dans ce cas particulier. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n kP(T = k) &= \sum_{k=1}^n k(P(T > k-1) - P(T > k)) \\ &= \sum_{k=1}^n kP(T > k-1) - \sum_{k=1}^n kP(T > k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)P(T > k) - \sum_{k=0}^n kP(T > k) \text{ en réindexant} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} P(T > k) - nP(T > n) \text{ en simplifiant} \end{aligned}$$

or $\sum P(T > n)$ diverge et $nP(T > n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$, donc $\sum kP(T = k)$ diverge :

T n'admet pas d'espérance.

IV.G) D'après **III.C.3b**, pour s fixé dans $[0, 1[$,

$$G_Z(s) = \frac{s}{2 - G_Z(s)} \quad \text{d'où} \quad G_Z(s)^2 - 2G_Z(s) = -s$$

et en ajoutant (habilement) 1 : $(1 - G_Z(s))^2 = 1 - s$.

Or $1 - G_Z(s) \geq 0$, donc : $1 - G_Z(s) = \sqrt{1 - s}$. Finalement :

$$G_Z(s) = 1 - \sqrt{1 - s}.$$

Pour $s \in]-1, 1[$, j'ai le développement en série entière classique :

$$\begin{aligned} (1 - s)^{1/2} &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1) \dots (\frac{1}{2} - k + 1)}{k!} \cdot (-1)^k s^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k - 3)}{2^k k!} \cdot s^k \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k - 2)!}{(2^k k!) (2^{k-1} (k - 1)!)} \cdot s^k \end{aligned}$$

d'où

$$G_Z(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k - 2)!}{2^{2k-1} k! (k - 1)!} \cdot s^k$$

et la loi de Z s'en déduit par identification des coefficients :

$$P(Z = 0) = 0 \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(Z = k) = \frac{(2k - 2)!}{2^{2k-1} (k - 1)! k!}.$$

