# X-ENS PSI - 2013

**Remarque préliminaire** : dans le sujet, on demande de statuer sur la convergence d'intégrales. Quand les fonctions mises en jeu sont positives, une telle convergence équivaut à l'intégrabilité. On raisonnera donc souvent en terme d'intégrabilité sans revenir sur cet argument.

**1) a)** Soit $x > 0$ et $m \in \mathbb{R}$. La fonction $g_{m,x} : t \mapsto t^m e^{-(t^2+x/t)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et j'ai donc des problèmes aux voisinages de 0 et de $+\infty$.
Au voisinage de 0 : $g_{m,x}(t) \to 0$ quand $t \to 0$ (par croissances comparées et car $x > 0$) et $g_{m,x}$ est donc prolongeable par continuité en 0.
Au voisinage de l'infini : $t^2 g_{m,x}(t) = \exp\left(-t^2 - \frac{x}{t} + (m+2)\ln t\right)$ ; le terme dans l'exponentielle équivaut à $-t^2$ et tend vers $-\infty$ ; par composition des limites, j'ai donc $g_{m,x}(t) = o(1/t^2)$ qui est intégrable au voisinage de $+\infty$.
Finalement, $g_{m,x} \in L^1(\mathbb{R}_+^*)$ et l'intégrale $T_m(x)$ existe.

**b)** Soit $m \in \mathbb{R}$. $g_m : t \mapsto t^m e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est négligeable devant $t \mapsto 1/t^2$ au voisinage de $+\infty$ (croissances comparées) et donc intégrable au voisinage de $+\infty$. Au voisinage de 0, $g_m(t) \sim t^m$ est intégrable ssi $m > -1$. J'ai donc

$$A = ]-1, +\infty[$$

**c)** Une intégration par parties donne (les intégrales convergent d'après **b)** et le crochet par croissances comparées) :

$$\forall m \geq 2 \quad \int_0^{+\infty} t^m e^{-t^2} \mathrm{d}t = \left[-\frac{t^{m-1}}{2} e^{-t^2}\right]_0^{+\infty} + \frac{m-1}{2} \int_0^{+\infty} t^{m-2} e^{-t^2} \mathrm{d}t$$

soit

$$\forall m \geq 2,\ T_m(0) = \frac{m-1}{2} T_{m-2}(0).$$

Une récurrence donne alors, sachant que $T_0(0) = \sqrt{\pi}/2$ (énoncé) et $T_1(0) = \left[-e^{-t^2}/2\right]_0^{+\infty} = 1/2$,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ T_{2k}(0) = \frac{(2k)!}{2^{2k+1} k!}\sqrt{\pi} \quad \text{et} \quad T_{2k+1}(0) = \frac{k!}{2}.}$$

**2) a)** Il s'agit d'utiliser le théorème de continuité des intégrales à paramètres. Soit $m \in A$.

* $\forall x \geq 0,\ t \mapsto t^m e^{-(t^2+x/t)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
* $\forall t > 0,\ x \mapsto t^m e^{-(t^2+x/t)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
* <u>*Domination*</u> : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \forall t > 0,\ \left|t^m e^{-(t^2+x/t)}\right| \leq t^m e^{-t^2}$ et comme $m \in A$, la question **1)b)** montre que le majorant est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi je peux conclure que

$$\boxed{\forall m \in A,\ T_m \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+).}$$

**b)** On veut utiliser le même théorème, mais ici il faut placer un garde-fou au voisinage de 0 : soient $m \in \mathbb{R}$ et $a > 0$.

* $\forall x \geq a,\ t \mapsto t^m e^{-(t^2+x/t)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
* $\forall t > 0,\ x \mapsto t^m e^{-(t^2+x/t)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
* $\forall x \geq a,\ \forall t > 0,\ \left|t^m e^{-(t^2+x/t)}\right| \leq t^m e^{-(t^2+a/t)}$ et la question **1)a)** montre que le majorant est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Il en résulte que $T_m$ est continue sur $[a, +\infty[$, cela pour tout $a > 0$, autrement dit

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{R},\ T_m \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*).}$$

**c)** La relation de Chasles indique que

$$\forall x > 0,\ \forall m \in \mathbb{R},\ T_m(x) = \int_0^1 t^m e^{-(t^2+x/t)} \mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} t^m e^{-(t^2+x/t)} \mathrm{d}t$$

La seconde intégrale est positive (on intègre une fonction positive et les bornes sont dans le bon sens). J'ai aussi

$$\forall t \in ]0,1],\ t^m e^{-(t^2+x/t)} \geq e^{-1} t^m e^{-x/t}$$

et pour $x > 0$, le minorant est intégrable sur $]0,1]$ (faux problème en 0 où la fonction est prolongeable par continuité par la valeur 0). Il est donc licite d'écrire

$$\forall x > 0,\ \forall m \in \mathbb{R},\ T_m(x) \geq \int_0^1 t^m e^{-1} e^{-x/t} \mathrm{d}t = e^{-1} \int_0^1 t^m e^{-x/t} \mathrm{d}t$$

Le changement de variable $t \mapsto u = x/t$ réalise une bijection $\mathcal{C}^1$ strictement décroissante de $]0,1[$ dans $]x,+\infty[$. D'où comme la dernière intégrale ci-dessus converge :

$$\int_0^1 t^m e^{-x/t} \mathrm{d}t = \int_{+\infty}^x \left(\frac{x}{u}\right)^m e^{-u} \left(-\frac{x}{u^2}\right) \mathrm{d}u \quad \text{car} \quad t = \frac{x}{u}.$$

D'où

$$\forall x > 0,\ \forall m \in \mathbb{R},\ T_m(x) \geq e^{-1} x^{m+1} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u^{m+2}} \mathrm{d}u$$

La fonction $u \mapsto \frac{e^{-u}}{u^{m+2}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, négligeable devant $1/u^2$ au voisinage de $+\infty$ (croissances comparées) et donc intégrable au voisinage de $+\infty$. En 0, elle équivaut à $1/u^{m+2}$ qui est intégrable au voisinage de 0 ssi $m + 2 < 1$ *i.e.* $m < -1$. On distingue donc deux cas.

* Si $m < -1$, l'intégrale du membre de droite tend vers $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u^{m+2}} \mathrm{d}u$ quand $x \to 0^+$ et cette intégrale est strictement positive (la fonction intégrée est continue, positive et non nulle). Comme $x^{m+1} \to +\infty$, le membre de droite est donc de limite $+\infty$ quand $x \to 0^+$.
* Si $m = -1$, l'intégrale du membre de droite tend vers $+\infty$ (la fonction est positive et non intégrable). Le membre de droite est donc encore de limite $+\infty$ quand $x \to 0^+$.

Par théorème de comparaison, j'ai donc

$$\boxed{\forall m \leq -1,\ \lim_{x \to 0^+} T_m(x) = +\infty.}$$

**3) a)** Il s'agit d'utiliser le théorème de régularité des intégrales à paramètres. Je me place à nouveau sur $[a,+\infty[$ pour $a > 0$ fixé.

* $\forall x \geq a,\ t \mapsto t^m e^{-(t^2+x/t)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (question **1)a)**).
* $\forall t > 0,\ x \mapsto t^m e^{-(t^2+x/t)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ de dérivée $x \mapsto -t^{m-1} e^{-(t^2+x/t)}$.
* $\forall x \geq a,\ t \mapsto -t^{m-1} e^{-(t^2+x/t)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
* _Domination_ : $\forall x \geq a,\ \forall t > 0,\ \left|t^{m-1} e^{-(t^2+x/t)}\right| \leq t^{m-1} e^{-(t^2+a/t)}$ et la question **1)a)** montre que le majorant est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Je conclus que $T_m$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$, cela pour tout $a > 0$, donc

$$\boxed{T_m \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*) \text{ avec } \forall x > 0,\ T_m'(x) = -T_{m-1}(x).}$$

**b)** Une récurrence sur $p$ montre alors immédiatement que

$$\forall m \in \mathbb{R},\ \forall p \in \mathbb{N}^*,\ T_m \in \mathcal{C}^p(\mathbb{R}_+^*) \quad \text{et} \quad T_m^{(p)} = (-1)^p T_{m-p}$$

ce qui montre, en particulier, que

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{R},\ T_m \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*).}$$

Comme $T_k$ est une fonction positive, il découle des formules obtenues que $T_m'$ est négative. Ainsi,

$$\boxed{\text{Pour tout } m \text{ dans } \mathbb{R},\ T_m \text{ décroît sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

**c)** Pour pouvoir parler de dérivabilité à droite en 0, il faut qu'il y ait continuité en 0 (ou au moins une limite finie en $0^+$). Il est donc nécessaire que $m \in A$. Sous cette hypothèse, j'ai une fonction $T_m \in C^0(\mathbb{R}_+) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$ pour laquelle je peux utiliser le théorème de la limite de la dérivée. Distinguons deux cas.

* Si $m - 1 \in A$ alors $T_m'(x) = -T_{m-1}(x) \to -T_{m-1}(0)$ quand $x \to 0^+$ et $T_m$ est donc dérivable en 0 avec $T_m'(0) = -T_{m-1}(0)$.
* Si $m - 1 \notin A$ alors $T_m'(x) = -T_{m-1}(x) \to -\infty$ quand $x \to 0^+$ et $T_m$ n'est donc pas dérivable en 0 mais a un graphe qui présente une demi-tangente verticale.

Finalement,

$$\boxed{T_m \text{ est dérivable en } 0 \text{ (et est alors de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+) \text{ si et seulement si } m > 0.}$$

**4) a)** Soit $0 < A < B$ ; une intégration par parties donne

$$\int_A^B t^{m-1}(2t - x/t^2)e^{-(t^2+x/t)}\mathrm{d}t = \left[-t^{m-1}e^{-(t^2+x/t)}\right]_A^B + (m-1)\int_A^B t^{m-2}e^{-(t^2+x/t)}\mathrm{d}t$$

Je fais tendre $A$ vers $0^+$ et $B$ vers $+\infty$ pour en déduire (toutes les quantités existent) que

$$\boxed{\forall x > 0,\ 2T_m(x) - xT_{m-3}(x) = (m-1)T_{m-2}(x).}$$

**b)** Il suffit alors d'utiliser les formules de **3)b)** pour en déduire que

$$\boxed{\forall x > 0,\ 2T_m(x) + xT_m'''(x) = (m-1)T''(x).}$$

**5) a)** $\phi : t \mapsto 1/t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et bijective (strictement décroissante) de $\mathbb{R}_+^*$ dans son image $\mathbb{R}_+^*$. Le changement de variable $u = \phi(t)$ est donc licite et donne

$$T_m(x) = \int_{+\infty}^0 u^{-m}e^{-(1/u^2+xu)}\left(-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} u^{-m-2}e^{-(1/u^2+xu)}\mathrm{d}u$$

**b)** Soit $n \in \mathbb{N}$ ; $u \mapsto u^n e^{-u}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et négligeable devant $1/u^2$ au voisinage de $+\infty$. C'est donc une fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Une intégration par parties donne (tout converge)

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^{+\infty} u^{n+1}e^{-u}\mathrm{d}u = \left[-u^{n+1}e^{-u}\right]_0^{+\infty} + (n+1)\int_0^{+\infty} u^n e^{-u}\mathrm{d}u$$

Le crochet est nul et une récurrence immédiate donne

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^{+\infty} u^n e^{-u}\mathrm{d}u = n!\int_0^{+\infty} e^{-u}\mathrm{d}u = n!.}$$

**c)** Il nous suffit de combiner les questions précédentes. En remarquant que $e^{-(1/u^2+u)} \le e^{-u}$ pour $u > 0$ et que toutes les quantités écrites existent, j'ai

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\},\ T_{-m}(1) = \int_0^{+\infty} u^{m-2}e^{-(1/u^2+u)}\mathrm{d}u \le \int_0^{+\infty} u^{m-2}e^{-u}\mathrm{d}u = (m-2)!.}$$

**d)** Fixons $k \in \mathbb{N}$. Soit $x \in ]-1,1[$ ; j'ai

$$\forall n \ge k+2,\ \left|\frac{(-1)^n}{n!}T_{k-n}(1)x^n\right| \le |x|^n\frac{(n-k-2)!}{n!} \le \frac{|x|^n}{n^{k+2}}$$

Le majorant est de limite nulle quand $n \to +\infty$ et la suite $\left(\frac{(-1)^n}{n!}T_{k-n}(1)x^n\right)_{n\ge 0}$ est donc bornée (puisque de limite nulle). Par définition du rayon de convergence, j'ai donc

$$\boxed{R \ge 1.}$$

**e)** $k \in \mathbb{N}$ et $x \in ]-1,1[$ sont fixés. En utilisant le développement en série entière de l'exponentielle, j'ai directement

$$T_k(1+x) = \int_0^{+\infty} t^k e^{-(t^2+1/t)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x/t)^n}{n!}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}t^{k-n}e^{-(t^2+1/t)}x^n\mathrm{d}t$$

On veut intervertir somme et intégrale et on pose donc $f_n : t \mapsto \frac{(-1)^n}{n!}t^{k-n}e^{-(t^2+1/t)}x^n$.

* Les $f_n$ sont des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}^{+*}$.
* $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa somme est $t \mapsto t^m e^{-(t^2+1/t)}e^{-x/t}$ qui est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
* On vient de voir que

$$\forall n \ge k+2,\ \int_0^{+\infty}|f_n| = \frac{T_{k-n}(1)|x|^n}{n!} \le \frac{|x|^n}{n^{k+2}}$$

et le majorant est le terme général d'une série convergente (dominée par $1/n^2$ par croissances comparées et car $|x| < 1$).

Le théorème d'intégration terme à terme s'applique et donne

$$\boxed{T_k(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} T_{k-n}(1) x^n.}$$

**6) a)** Soit $x > 0$. Notons $f_x : t \mapsto g(t,x)$. $f_x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall t > 0,\ f_x'(t) = 2t - \frac{x}{t^2}$$

En posant $M(x) = (x/2)^{1/3}$, je constate que $f_x$ est strictement décroissante sur $]0, M(x)]$ puis strictement croissante sur $[M(x), +\infty[$ et admet donc un minimum atteint uniquement en $M(x)$ qui vaut

$$f_x(M(x)) = g(M(x), x) = x^{2/3}(2^{-2/3} + 2^{1/3}) = 3(x/2)^{2/3}.$$

En conclusion,

$$\boxed{t \mapsto g(t,x) \text{ admet un unique minimum en } M(x) = (x/2)^{1/3} \text{ et } g(M(x), x) = 3(x/2)^{2/3}.}$$

**b)** Soient $m \in \mathbb{R}^+$ et $x > 0$. La relation de Chasles donne

$$T_m(x) = \int_0^{x^{1/3}} t^m e^{-g(t,x)} \mathrm{d}t + \int_{x^{1/3}}^{\infty} t^m e^{-g(t,x)} \mathrm{d}t$$

$M(x) \leq x^{1/3}$ découle immédiatement de $2^{1/3} \geq 1$ (et de $x \geq 0$) et, avec les variations étudiées en question précédente,

$$\forall t \geq x^{1/3},\ g(t,x) \geq g(x^{1/3}, x) = 2x^{2/3}.$$

J'écris alors

$$\forall t \geq x^{1/3},\ g(t,x) = \frac{19}{20} g(t,x) + \frac{1}{20} g(t,x) \geq \frac{19}{10} x^{2/3} + \frac{t^2}{20}$$

J'en déduis que

$$\forall t \geq x^{1/3},\ t^m e^{-g(t,x)} \leq t^m e^{-t^2/20} e^{-\frac{19}{10}x^{2/3}}$$

Le membre de droite est intégrable au voisinage de $+\infty$ (et ici sur $[x^{1/3}, \infty[$). En intégrant et en utilisant la relation vue plus haut, j'obtiens

$$\boxed{T_m(x) \leq \int_0^{x^{1/3}} t^m e^{-g(t,x)} \mathrm{d}t + e^{-\frac{19}{10}x^{2/3}} \int_{x^{1/3}}^{\infty} t^m e^{-\frac{t^2}{20}} \mathrm{d}t.}$$

**c)** Soit $\varepsilon > 0$ et $m \in \mathbb{R}^+$. La fonction $t \mapsto t^{m-1} e^{-\varepsilon t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et de limite nulle en $+\infty$. C'est donc une fonction bornée sur $[1, +\infty[$ (la limite en $+\infty$ permet de se ramener à un segment où on utilise la continuité). Je dispose donc de $C > 0$ tel que

$$\forall t \geq 1,\ t^m \leq C t e^{\varepsilon t^2}$$

Fixons maintenant $\varepsilon > 0$ ; je peux trouver $\varepsilon' \in ]0, \min(1/20, \varepsilon)[$ (puisque le minimum est strictement positif) et le début de la question donne un $C > 0$ tel que $\forall t \geq 1,\ t^m \leq C t e^{\varepsilon'^2}$. J'ai alors

$$\forall x \geq 1,\ \forall t \geq x^{1/3},\ t^m e^{-\frac{t^2}{20}} \leq C t e^{-t^2(\frac{1}{20} - \varepsilon')}$$

La fonction du membre de droite est intégrable au voisinage de $+\infty$ et par croissance de l'intégrale j'obtiens

$$\forall x \geq 1, \int_{x^{1/3}}^{\infty} t^m e^{-\frac{t^2}{20}} \mathrm{d}t \leq \frac{C}{2(\frac{1}{20} - \varepsilon')} e^{-x^{2/3}(1/20 - \varepsilon')}$$

ce qui nous donne

$$\forall x \geq 1,\ e^{(1/20-\varepsilon)x^{2/3}} \int_{x^{1/3}}^{\infty} t^m e^{-\frac{t^2}{20}} \mathrm{d}t \leq \frac{C}{2(\frac{1}{20} - \varepsilon')} e^{-x^{2/3}(\varepsilon - \varepsilon')} \leq \frac{C}{2(\frac{1}{20} - \varepsilon')}$$

Le majorant étant une constante, j'obtiens alors

$$e^{-\frac{19}{10}x^{2/3}} \int_{x^{1/3}}^{\infty} t^m e^{-\frac{t^2}{20}} \mathrm{d}t = O_{x \to \infty}\left(e^{-[\frac{39}{20} - \varepsilon] x^{2/3}}\right).$$

**d)** En minorant $g(t,x)$ par $3(x/2)^{2/3}$ (question **6)a)**), je remarque que (pour $m > 1$ afin que les quantités écrites existent)

$$\forall x > 0,\ \int_0^{x^{1/3}} t^m e^{-g(t,x)} \mathrm{d}t \leq e^{-3(x/2)^{2/3}} \int_0^{x^{1/3}} t^m \mathrm{d}t = \frac{x^{\frac{m+1}{3}}}{m+1} e^{-3(x/2)^{2/3}}$$

Par ailleurs, je prétends que $\frac{39}{20} > \frac{3}{2^{2/3}}$ (partir de $13^3 > 2000$ pour en déduire $4 * 13^3 > 20^3$ puis $4 > (20/13)^3$ d'où le résultat ; pas évident sans calculatrice !).

Je peux alors choisir $\varepsilon > 0$ tel que $\frac{39}{20} - \varepsilon > \frac{3}{2^{2/3}}$ afin que $e^{-\left[\frac{39}{20}-\varepsilon\right]x^{2/3}} = o\left(x^{\frac{m+1}{3}} e^{-3(x/2)^{2/3}}\right)$. La question précédente montre alors que $e^{-\frac{19}{10}x^{2/3}} \displaystyle\int_{x^{1/3}}^{\infty} t^m e^{-\frac{t^2}{20}} \mathrm{d}t$ est négligeable devant $x^{\frac{m+1}{3}} e^{-3(x/2)^{2/3}}$.

Avec **6)b)** j'en déduis que

$$T_m(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_0^{x^{1/3}} t^m e^{-g(t,x)} \mathrm{d}t$$

et ainsi

$$\boxed{T_m(x) = O_{x\to\infty}\left(x^{\frac{m+1}{3}} e^{-3(x/2)^{2/3}}\right).}$$

**7) a)** La question **5)a)** nous indique que

$$\forall x > 0,\ T_{-1}(x) = \int_0^{\infty} e^{-(1/u^2+xu)} \frac{\mathrm{d}u}{u}.$$

Je découpe l'intégrale en deux (sur $]0,1]$ et sur $[1,+\infty[$). J'ai $e^{-(1/u^2+xu)}$ qui est plus petit que $e^{-1/u^2}$ et que $e^{-xu}$. Or, $u \mapsto \frac{e^{-1/u^2}}{u}$ est intégrable sur $]0,1]$ (faux problème en 0 où la fonction est prolongeable par continuité par la valeur 0) et $u \mapsto \frac{e^{-xu}}{u}$ l'est sur $[1,+\infty[$ (seul problème en $+\infty$ où la fonction est négligeable devant $1/u^2$ par croissance comparées et puisque $x > 0$). J'ai donc

$$\forall x > 0,\ T_{-1}(x) \le \int_0^1 e^{-1/u^2} \frac{\mathrm{d}u}{u} + \int_1^{\infty} e^{-xu} \frac{\mathrm{d}u}{u}$$

Dans la première intégrale, on pose $v = 1/u$ pour obtenir $\int_0^1 e^{-1/u^2} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \int_1^{+\infty} e^{-v^2} \frac{\mathrm{d}v}{v}$ que l'on majore par $\int_1^{+\infty} e^{-v} \frac{\mathrm{d}v}{v}$. Dans la seconde, on pose $v = u$ pour obtenir $\int_1^{\infty} e^{-xu} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \int_x^{\infty} e^{-v} \frac{\mathrm{d}v}{v}$. J'ai alors

$$\forall x > 0,\ T_{-1}(x) \le 2\int_1^{+\infty} e^{-v} \frac{\mathrm{d}v}{v} + \int_x^1 e^{-v} \frac{\mathrm{d}v}{v}$$

En remarquant que $\int_1^{+\infty} e^{-v} \frac{\mathrm{d}v}{v} \le \int_1^{\infty} e^{-v} \mathrm{d}v = 1$, j'ai alors

$$\forall x > 0,\ T_{-1}(x) \le 2 + \int_x^1 e^{-v} \frac{\mathrm{d}v}{v}$$

- ∗ Si $x \ge 1$, l'intégrale du membre de droite est $\le 0$ et $T_{-1}(x) \le 2$.
- ∗ Si $x \in ]0,1]$, on majore $e^{-v}/v$ par $1/v$ pour obtenir $T_{-1}(x) \le 2 - \ln x$.

**b)** Fixons $x \in [0,L]$. $g_x\ :\ y \mapsto \rho(y)T_{-1}(|x-y|)$ est continue sur $[0,L]\setminus\{x\}$. Pour tout $y \in [0,L]$, j'ai $|x-y| \le 1$ (car $x,y \in [0,L]$ et $L \in [0,1]$). J'ai donc

$$\forall y \in [0,L]\,,\ |g_x(y)| \le \|\rho\|_\infty T_{-1}\left(|x-y|\right) \le \|\rho\|_\infty \left(2 - \ln|x-y|\right) = o_{y\to x}\left(\frac{1}{\sqrt{|x-y|}}\right)$$

ce qui prouve que $g_x$ est intégrable au voisinage de $x$. Finalement, $g_x$ est intégrable sur $[0,L]$ et $[F(\rho)](x)$ existe. La majoration précédente donne (les quantités écrites existent)

$$\begin{aligned}
|[F(\rho)](x)| &\le \int_{[0,L]} \|\rho\|_\infty T_{-1}\left(|x-y|\right) \mathrm{d}y \\
&\le \|\rho\|_\infty \left(\int_{[0,L]} (2 - \ln|x-y| \, \mathrm{d}y\right) \\
&\le \|\rho\|_\infty \left(2L - \int_{[0,L]} \ln|x-y| \, \mathrm{d}y\right)
\end{aligned}$$

Or

$$\int_{[0,L]} \ln|x-y| \, \mathrm{d}y = \int_0^x \ln(x-y)\mathrm{d}y + \int_x^L \ln(y-x)\mathrm{d}y = \int_0^x \ln u \mathrm{d}u + \int_0^{L-x} \ln v \mathrm{d}v$$

et je sais calculer ces intégrales (une primitive de $v \mapsto \ln v$ est $v \mapsto v\ln v - v$). Pour $x \in ]0,L[$, j'obtiens

$$\int_{[0,L]} \ln|x-y| \, \mathrm{d}y = x\ln x + (L-x)\ln(L-x) - L$$

Posons $h : x \mapsto x\ln x + (L-x)\ln(L-x) - L$ ; c'est une fonction dérivable sur $]0,L[$ et $h'(x) = \ln x - \ln(L-x)$. $h$ est décroissante sur $]0,L/2]$ puis croît sur $[L/2,L[$. Elle atteint son minimum en $x = L/2$ et ainsi

$$\int_{[0,L]} \ln|x-y|\,\mathrm{d}y = h(x) \geq h(L/2) = L\ln L - (1+\ln 2)L \geq L\ln L - 2L$$

J'ai finalement

$$|[F(\rho)](x)| \leq \|\rho\|_\infty (4L - L\ln L) = \|\rho\|_\infty (4L + L|\ln L|)$$

ce qui est un peu mieux que l'inégalité demandée.

**8) a)** Il s'agit d'utiliser le théorème de continuité des intégrales à paramètres.

* $\forall x \in [0,L],\ v \mapsto g_0(v)e^{-\frac{x}{v}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
* $\forall v > 0,\ x \mapsto g_0(v)e^{-\frac{x}{v}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
* *Domination* : $\forall x \in [0,L],\ \forall v \in \mathbb{R}_+*,\ |g_0(v)e^{-\frac{x}{v}}| \leq |g_0(v)|$ et le majorant est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Le théorème s'applique et donne

$$\boxed{\alpha \in \mathcal{C}([0,L]).}$$

**b)** Soit $v < 0$ ; notons $h : x \mapsto \displaystyle\int_x^L \rho(y)e^{-\frac{x-y}{v}}\mathrm{d}y$. J'ai aussi

$$\forall x \in [0,L],\ h(x) = -e^{-x/v}\int_L^x \rho(y)e^{y/v}\mathrm{d}v$$

$y \mapsto \rho(y)e^{y/v}$ étant continue sur l'intervalle $[0,L]$, le théorème fondamental indique que $x \mapsto \displaystyle\int_L^x \rho(y)e^{y/v}\mathrm{d}v$ en est une primitive sur $[0,L]$. Par théorème d'opération, $h \in \mathcal{C}^1([0,L])$ et

$$\forall x \in [0,L],\ h'(x) = -\frac{1}{v}h(x) - \rho(x)$$

Ainsi, $x \mapsto g(x,v)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\forall x \in [0,L],\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,v) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-v^2}}{|v|}\left(-\frac{1}{v}h(x) - \rho(x)\right) = \frac{1}{v}\left(-g(x,v) + \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-v^2}\rho(x)\right).$$

Supposons maintenant $v > 0$ ; on note cette fois $k : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \rho(y)e^{-\frac{x-y}{v}}\mathrm{d}y$. On montre comme ci-dessus que $k$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\forall x \in [0,L],\ k'(x) = -\frac{1}{v}k(x) + \rho(x)$$

J'en déduis que $x \mapsto g(x,v)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\forall x \in [0,L],\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,v) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-v^2}}{|v|}\left(-\frac{1}{v}k(x) + \rho(x)\right) - \frac{1}{v}g_0(v)e^{-\frac{x}{v}} = \frac{1}{v}\left(-g(x,v) + \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-v^2}\rho(x)\right)$$

Finalement, la même formule est valable dans les deux cas. Enfin,

$$\forall v > 0,\ g(0,v) = g_0(v) \quad \text{et} \quad \forall v < 0,\ g(L,v) = 0$$

s'obtient en remplaçant $x$ par 0 ou $v$ dans l'expression de $g(x,v)$.

**9) a)** On suppose $L \in ]0,1/20[$ ; on est alors dans le cadre de la question **7)** et, en particulier, j'ai

$$\forall \rho \in \mathcal{C}([0,L]),\ \|F(\rho)\|_\infty \leq (4L - 2\ln(L))\|\rho\|_\infty.$$

Soit $H : \rho \in \mathcal{C}([0,L]) \mapsto \frac{2}{\sqrt{\pi}}F(\rho) + \tilde{\alpha}$ où $F$ est la fonction définie en question **7)**. Pour appliquer le résultat admis, j'aimerais que $H$ soit une application de $\mathcal{C}([0,L])$ dans lui-même. J'ai donc besoin de montrer que $F(\rho)$ est continue quand $\rho$ l'est. Cette démonstration est laissée au lecteur (pas de difficulté particulière avec la majoration du **7)a)** pour la domination...).

Si $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{C}([0,L])$, j'ai

$$\|H(\rho_1) - H(\rho_2)\|_\infty = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\|F(\rho_1) - F(\rho_2)\|_\infty = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\|F(\rho_1 - \rho_2)\|_\infty \leq \frac{8L - 4L\ln L}{\sqrt{\pi}}\|\rho_1 - \rho_2\|_\infty$$

La fonction $f : x \mapsto 8x - 4x \ln x$ se prolonge par continuité à $[0,1]$ (par $f(0) = 0$) ; elle est dérivable sur $]0,1]$ et sa dérivée $x \mapsto 4(1 - \ln x)$ est strictement positive sur $]0,1[$. Donc, comme $L \in ]0, 1/20[$, j'ai

$$0 < 8L - 4L \ln L < \frac{2}{5} - \frac{1}{5} \ln \frac{1}{20} = \frac{2 + \ln 20}{5} < \frac{7}{5} \quad \text{car} \quad e^5 > 2^5 > 20.$$

Noter que déjà $e^3 > 20$ mais de peu, pas évident sans calculatrice ! Or $(5\sqrt{\pi})^2 = 25\pi > 75$, d'où

$$k = \frac{8L - 4L \ln L}{\sqrt{\pi}} \in ]0,1[ \quad \text{car} \quad \frac{49}{75} < 1.$$

On peut ainsi utiliser le résultat admis (théorème du point fixe) pour en déduire l'existence et l'unicité de la fonction $\tilde{\rho}$ demandée.

**b)** J'ai bien sûr envie de choisir $\tilde{g}$ comme en question **8)** en utilisant $\tilde{\rho}$ pour un bon choix de $\tilde{\alpha}$. On choisit

$$\tilde{\alpha} \ : \ x \mapsto \int_0^\infty g_0(v) e^{-x/v} \, dv$$

qui est continue sur $[0, L]$ (question **8)a)**) et on pose

$$\tilde{g}(x,v) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-v^2}}{|v|} \int_x^L \tilde{\rho}(y) e^{-\frac{x-y}{v}} \mathrm{d}y \quad \text{si } v < 0$$

$$\tilde{g}(x,v) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-v^2}}{|v|} \int_0^x \tilde{\rho}(y) e^{-\frac{x-y}{v}} \mathrm{d}y + g_0(v) e^{-\frac{x}{v}} \quad \text{si } v > 0$$

où $\tilde{\rho}$ est l'unique fonction continue telle que

$$\forall x \in [0,L], \ \tilde{\rho}(x) = \tilde{\alpha}(x) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^L \tilde{\rho}(y) T_{-1}(|x-y|) \, \mathrm{d}y$$

D'après la question **8)**, j'ai

* $\forall v \in \mathbb{R}^*, \ \tilde{g}(\cdot, v)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, L]$
* $\forall x \in [0, L], v \in \mathbb{R}^*$
* $v \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x}(x,v) = \tilde{\rho}(x) \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-v^2} - \tilde{g}(x,v)$
* $\forall v \in \mathbb{R}_+^*, \ \tilde{g}(0,v) = g_0(v)$ et $\forall v \in \mathbb{R}_-^*, \ \tilde{g}(L,v) = 0$.

Il nous reste à montrer que $\forall x \in [0, L]$, $\tilde{g}(x, \cdot)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ et à évaluer les intégrales (on veut que leur somme soit égale à $\tilde{\rho}(x)$ pour obtenir le dernier point). Je me contente ici de calculer les intégrales en admettant les intégrabilités. Lors du calcul qui suit, j'utilise aussi le théorème de Fubini avec des intégrales généralisées (ce qui n'est pas au programme mais est correct quand on travaille avec des fonctions intégrables). J'ai

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^0 \tilde{g}(x,v) &= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 \left( \frac{e^{-v^2}}{v} \int_x^L \tilde{\rho}(y) e^{-\frac{x-y}{v}} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}v \\
&= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^L \tilde{\rho}(y) \left( \int_{-\infty}^0 \frac{e^{-v^2}}{v} e^{-\frac{x-y}{v}} \mathrm{d}v \right) \mathrm{d}y \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^L \tilde{\rho}(y) \left( \int_0^\infty \frac{e^{-w^2}}{w} e^{\frac{x-y}{w}} \mathrm{d}w \right) \mathrm{d}y \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^L \tilde{\rho}(y) T_{-1}(y-x) \, \mathrm{d}y
\end{aligned}$$

où j'ai utilisé le changement de variable $\mathcal{C}^1$ bijectif $w = -v$ ; et par un calcul similaire,

$$\int_0^\infty \tilde{g}(x,v) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \tilde{\rho}(y) T_{-1}(x-y) \mathrm{d}y + \tilde{\alpha}(x).$$

En sommant, et compte tenu de la relation vérifiée par $\tilde{\rho}$, j'obtiens bien

$$\int_{-\infty}^0 \tilde{g}(x,v) \mathrm{d}v + \int_0^\infty \tilde{g}(x,v) \mathrm{d}v = \tilde{\rho}(x).$$