Analyse 2

On note $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls, $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs, $\mathbb{R}_-^*$ l'ensemble des nombres réels strictement négatifs et $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
Pour I intervalle de $\mathbb{R}$, on note $\mathcal{C}(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour une fonction f continue et bornée sur I, on pose $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in I} |f(x)|$.

On note, pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $m \in \mathbb{R}$, $T_m(x) = \displaystyle\int_0^\infty t^m e^{-(t^2+x/t)}\mathrm{d}t$.

On pourra librement utiliser la formule $T_0(0) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1) **a)** Montrer que si $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $m \in \mathbb{R}$, l'intégrale sui définit $T_m(x)$ est convergente.

b) Quel est l'intervalle A des $m \in \mathbb{R}$ tels que l'intégrale qui définit $T_m(0)$ est convergente ?

c) Calculer $T_{2k}(0)$ et $T_{2k+1}(0)$ pour $k \in \mathbb{N}$ (en fonction de $k!$ et $(2k)!$).

2) **a)** Soit $m \in A$. Montrer que T_m est continue sur $\mathbb{R}_+$.

b) Soit $m \in \mathbb{R}$. Montrer que T_m est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) Montrer que pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $m \in \mathbb{R}$, $T_m(x) \geq e^{-1}\displaystyle\int_0^1 t^m e^{-x/t}\mathrm{d}t$.

En déduire la valeur de $\lim\limits_{x\to 0^+} T_m(x)$ lorsque $m \notin A$, en utilisant le changement de variable $w = x/t$.

3) **a)** Soit $m \in \mathbb{R}$. Montrer que T_m est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer T_m' en fonction de T_{m-1}.

b) Soit $m \in \mathbb{R}$. La fonction T_m est-elle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$? Quel est le sens de variation de T_m sur $\mathbb{R}_+^*$?

c) Discuter en fonction de m la dérivabilité à droite de T_m en 0.

4) **a)** Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $m \in \mathbb{R}$. Calculer $T_m(x)$ en fonction de $T_{m-2}(x)$ et $T_{m-3}(x)$. On pourra pour cela considérer la quantité :

$$\int_A^B t^{m-1}(2t - x/t^2)e^{-(t^2+x/t)}\mathrm{d}t \quad \text{pour} \quad 0 < A < B.$$

b) Soit $m \in \mathbb{R}$. Trouver une relation entre $xT_m'''(x), T_m''(x)$ et $T_m(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

5) **a)** Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $m \in \mathbb{R}$. Effectuer le changement de variable $t = 1/u$ dans l'intégrale qui définit T_m. On justifiera soigneusement le calcul.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier l'existence de la quantité $\displaystyle\int_0^\infty u^n e^{-u}du$ et la calculer.

c) Montrer que pour $m \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, $T_{-m}(1) \leq (m-2)!$.

d) Soit $k \in \mathbb{N}$ et R le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!}T_{k-n}(1)x^n$; montrer que $R \geq 1$.

e) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que pour $x \in \,]-1,1[$, $T_k(1+x) = \displaystyle\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!}T_{k-n}(1)x^n$.

6) Pour $t, x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $g(t,x) = t^2 + x/t$.

a) Montrer que pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto g(t,x)$ admet un unique minimum en $t = M(x)$ que l'on déterminera. Calculer $g(M(x),x)$.

b) Soit $m \in \mathbb{R}_+$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer en utilisant l'inégalité $M(x) \leq x^{1/3}$ que

$$T_m(x) \leq \int_0^{x^{1/3}} t^m e^{-g(t,x)}\mathrm{d}t + e^{-\frac{19}{10}x^{2/3}} \int_{x^{1/3}}^\infty t^m e^{-\frac{t^2}{20}}\mathrm{d}t$$

c) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ (et $m \in \mathbb{R}_+$), l'on peut trouver $C > 0$ tel que :$\forall t \geq 1,\ t^m \leq Cte^{\varepsilon t^2}$.

En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$e^{-\frac{19}{10}x^{2/3}} \int_{x^{1/3}}^{\infty} t^m e^{-\frac{t^2}{20}} \mathrm{d}t = O_{x\to\infty}\left(e^{-\left(\frac{39}{20}-\varepsilon\right)x^{2/3}}\right)$$

d) Montrer que : $T_m(x) = O_{x\to\infty}\left(x^{\frac{m+1}{3}} e^{-3(x/2)^{2/3}}\right)$.

7) a) Montrer que pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$T_{-1}(x) \leq \int_0^1 e^{-1/u^2} \frac{\mathrm{d}u}{u} + \int_1^{\infty} e^{-xu} \frac{\mathrm{d}u}{u}.$$

En déduire que $T_{-1}(x) \leq 2$ pour $x \geq 1$ et que

$$T_{-1}(x) \leq 2 + \int_x^1 e^{-w} \frac{\mathrm{d}w}{w} \leq 2 - \ln(x) \quad \text{si } 0 < x \leq 1.$$

b) Soit $L \in [0,1]$ et $\rho \in \mathcal{C}([0,L])$. On pose

$$[F(\rho)](x) = \int_0^L \rho(y) T_{-1}(|x-y|) \mathrm{d}y$$

Montrer que $[F(\rho)](x)$ est bien définie pour $x \in [0,L]$ et que

$$\|F(\rho)\|_\infty \leq \big(4L + 2L|\ln(L)|\big) \|\rho\|_\infty.$$

8) Soit $L > 0$, $\rho \in \mathcal{C}([0,L])$ et g_0 continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On pose pour $x \in [0,L]$ et $v \in \mathbb{R}^*$:

$$g(x,v) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-v^2}}{|v|} \int_x^L \rho(y) e^{-\frac{x-y}{v}} \mathrm{d}y \quad \text{si } v < 0$$

$$g(x,v) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-v^2}}{|v|} \int_0^x \rho(y) e^{-\frac{x-y}{v}} \mathrm{d}y + g_0(v) e^{-\frac{x}{v}} \quad \text{si } v > 0.$$

a) Montrer que $\alpha : x \in [0,L] \mapsto \displaystyle\int_0^{\infty} g_0(v) e^{-\frac{x}{v}} \mathrm{d}v$ définit une fonction de $\mathcal{C}([0,L])$.

b) Montrer que pour $v \in \mathbb{R}^*$, la fonction $x \in [0,L] \mapsto g(x,v)$ est de classe C^1 sur $[0,L]$ et

$$\forall x \in [0,L],\ v \in \mathbb{R}^*, \quad v\frac{\partial g}{\partial x}(x,v) = \rho(x) \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-v^2} - g(x,v),$$

$$\forall v \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(0,v) = g_0(v), \quad \forall v \in \mathbb{R}_-^*,\ g(L,v) = 0.$$

9) On admet dans cette question le théorème suivant : soit $L > 0$, si H est une application de $\mathcal{C}([0,L])$ dans $\mathcal{C}([0,L])$ vérifiant

$$\exists\, k \in [0,1[,\ \forall \rho_1, \rho_2 \in C([0,L]),\ \|H(\rho_1) - H(\rho_2)\|_\infty \leq k\|\rho_1 - \rho_2\|_\infty$$

alors il existe un unique $\rho \in \mathcal{C}([0,L])$ tel que $H(\rho) = \rho$.

a) Soit $L > 0$ et $\widetilde{\alpha} \in \mathcal{C}([0,L])$. Montrer que si $L \in]0,1/20[$, il existe une unique fonction $\widetilde{\rho} \in \mathcal{C}([0,L])$ telle que

$$\forall x \in [0,L], \quad \widetilde{\rho}(x) = \widetilde{\alpha}(x) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^L \widetilde{\rho}(y) T_{-1}(|x-y|) \mathrm{d}y.$$

b) Soit $L \in]0,1/20[$ et g_0 continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Montrer qu'il existe une fonction $\widetilde{g}$ de $[0,L] \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

- $\forall v \in \mathbb{R}^*, \quad \widetilde{g}(\cdot, v)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,L]$,
- $\forall x \in [0,L], \quad \widetilde{g}(x,\cdot)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$,
- $\forall x \in [0,L],\ \forall v \in \mathbb{R}^*, \quad v\dfrac{\partial \widetilde{g}}{\partial x}(x,v) = \left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^*} \widetilde{g}(x,w)\, \mathrm{d}w + \int_{\mathbb{R}_-^*} \widetilde{g}(x,w)\, \mathrm{d}w\right) \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-v^2} - \widetilde{g}(x,v),$
- $\forall v \in \mathbb{R}_+^*, \quad \widetilde{g}(0,v) = g_0(v)$ et $\forall v \in \mathbb{R}_-^*, \quad \widetilde{g}(L,v) = 0.$

L'équation pour laquelle on a démontré un théorème d'existence est un modèle simplifié pour l'acoustique des gaz raréfiés.