Problème A

Préliminaire

1) D'une part : $(e^x-1)^m \underset{x\to 0}{\sim} x^m$ c'est-à-dire $(e^x-1)^m \underset{x\to 0}{=} x^m + o(x^m)$.

D'autre part, grâce à la formule du binôme : $(e^x-1)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (e^x)^k (-1)^{m-k}$.

Or je connais le développement limité de e^{kx} en 0 ; d'où, en regroupant les restes :

$$(e^x-1)^m \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} \left(\sum_{j=0}^{m} \frac{(kx)^j}{j!} \right) + o(x^m).$$

Je peux inverser les deux sommations, puisqu'il s'agit de la somme pour tous les couples (j,k) du carré $[\![0,n]\!]^2$, d'où :

$$(e^x-1)^m \underset{x\to 0}{=} \sum_{j=0}^{m} \left(\sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} k^j \right) \frac{x^j}{j!} + o(x^m).$$

Il en résulte, par unicité des coefficients du développement limité (0^j étant nul pour $j \geq 1$) :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} k^j = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq j \leq m-1 \\ m! & \text{si } j = m \end{cases}.}$$

2) Pour $k=n$, l'inégalité souhaitée est une égalité banale. Pour $1 \leq k < n$, j'écris :

$$(u_1 \dots u_n)^k - (u_1 \dots u_k)^n = (u_1 \dots u_k)^k \left[(u_{k+1} \dots u_n)^k - (u_1 \dots u_k)^{n-k} \right].$$

Or, la suite (u_n) étant croissante par hypothèse :

$$(u_{k+1} \dots u_n)^k \geq \left(u_k^{n-k}\right)^k = u_k^{k(n-k)} \quad \text{et} \quad (u_1 \dots u_k)^{n-k} \leq \left(u_k^k\right)^{n-k} = u_k^{k(n-k)}.$$

L'expression entre crochets ci-dessus est donc positive ou nulle, d'où

$$\boxed{(u_1 \dots u_k)^n \leq (u_1 \dots u_n)^k.}$$

3) Fixons $(a,b) \in I^2$. La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n sur $[a,b]$ s'écrit

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} \cdot f^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Le changement de variable (classique) $x = (1-t)a + tb$ donne

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} \cdot f^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{[(b-a)(1-t)]^n}{n!} \cdot f^{(n+1)}[(1-t)a+tb] \cdot (b-a)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n \cdot f^{(n+1)}[(1-t)a+tb]\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Je peux alors majorer la valeur absolue de l'intégrale, du fait que $1-t$ est positif :

$$\left| \int_0^1 (1-t)^n \cdot f^{(n+1)}[(1-t)a+tb]\,\mathrm{d}t \right| \leq \sup_I \left| f^{(n+1)} \right| \int_0^1 (1-t)^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1} \cdot \sup_I \left| f^{(n+1)} \right|$$

d'où finalement

$$\boxed{\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \sup_I \left| f^{(n+1)} \right|, \text{ cela pour tout } (a,b) \text{ de } I^2.}$$

Partie I

1) a) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. f étant de classe $\mathcal{C}^2$, l'inégalité de Taylor-Lagrange, appliquée sur $[x, x+h]$ (*resp.* $[x-h, x]$) me donne :

$$\left| f(x+h) - f(x) - hf'(x) \right| \leq \frac{|h|^2 M_2}{2} \quad \text{et} \quad \left| f(x-h) - f(x) - (-h) f'(x) \right| \leq \frac{|-h|^2 M_2}{2}$$

d'où, par l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}\left|2hf'(x)\right| &= \left|\left[f(x+h)-f(x)-hf'(x)\right]-\left[f(x-h)-f(x)-(-h)f'(x)\right]-f(x+h)+f(x-h)\right| \\ &\leq \frac{h^2M_2}{2}+\frac{h^2M_2}{2}+M_0+M_0=2M_0+h^2M_2\end{aligned}$$

J'en déduis, en divisant par $2h(>0)$:

$$\boxed{|f'(x)|\leq\frac{M_0}{h}+\frac{M_2h}{2},\text{ cela pour tout } x \text{ réel et tout } h>0.}$$

b) Notons que M_2 ne peut pas être nul, puisque f est bornée et non constante : f ne peut pas être une fonction affine. La fonction $\varphi : h\mapsto\frac{M_0}{h}+\frac{hM_2}{2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

$$\forall h>0\quad \varphi'(h)=\frac{M_2}{2}-\frac{M_0}{h^2}.$$

Il en résulte que φ atteint son minimum en $\sqrt{\dfrac{2M_0}{M_2}}$ et ce minimum vaut $\sqrt{2M_0M_2}$ (*yes* !) ; avec ce choix de h, j'ai, d'après la question précédente :

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad \left|f'(x)\right|\leq\sqrt{2M_0M_2}.$$

Autrement dit :

$$\boxed{f' \text{ est bornée par } \sqrt{2M_0M_2}.}$$

2) a) De la même manière, avec f de classe $\mathcal{C}^3$, j'écris les inégalités de Taylor-Lagrange :

$$\left|f(x+h)-f(x)-hf'(x)-\frac{h^2}{2}f''(x)\right|\leq\frac{h^3M_3}{6}$$

et

$$\left|f(x-h)-f(x)-(-h)f'(x)-\frac{(-h)^2}{2}f''(x)\right|\leq\frac{|-h|^3M_3}{6}.$$

J'en déduis comme au **1)** :

$$\left|2hf'(x)\right|\leq2\frac{h^3M_3}{6}+2M_0\quad\text{soit}\quad\left|f'(x)\right|\leq\psi(h)=\frac{h^2M_3}{6}+\frac{M_0}{h}$$

et ψ atteint son minimum en $\left(\dfrac{3M_0}{M_3}\right)^{1/3}$, minimum valant $\dfrac{1}{2}\left(9M_0^2M_3\right)^{1/3}$. En conclusion :

$$\boxed{f' \text{ est bornée par } \frac{1}{2}\left(9M_0^2M_3\right)^{1/3}.}$$

b) Alors le **1)** s'applique à $g=f'$! g est $\mathcal{C}^2$, $g=f'$ et $g''=f^{(3)}$ sont bornées, donc g' l'est également :

$$\boxed{f'' \text{ est également bornée sur } \mathbb{R}.}$$

Partie II

1) L'inégalité de Taylor-Lagrange sur $[x,x+h]$ s'écrit à l'ordre n (ou $n-1$ selon les ouvrages...) :

$$\left|f(x+h)-f(x)-\sum_{j=1}^{n-1}\frac{f^{(j)}(x)}{j!}h^j\right|\leq\frac{h^nM_n}{n!}$$

d'où, grâce à l'inégalité triangulaire : $\left|\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1}\frac{f^{(j)}(x)}{j!}h^j\right|\leq\dfrac{h^nM_n}{n!}+2M_0.$

J'en déduis par combinaison linéaire, avec encore l'inégalité triangulaire :

$$\left|\sum_{h=1}^{n-1}(-1)^{n-1-h}\binom{n-1}{h}\left(\sum_{j=1}^{n-1}\frac{f^{(j)}(x)}{j!}h^j\right)\right|\leq\sum_{h=1}^{n-1}\binom{n-1}{h}\left(\frac{h^nM_n}{n!}+2M_0\right).$$

En échangeant les deux premières sommations et en tenant compte du préliminaire, j'obtiens

$$(n-1)!\left|\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}\right| \leq \sum_{h=1}^{n-1}\binom{n-1}{h}\left(\frac{h^n M_n}{n!}+2M_0\right) \quad \text{soit} \quad \left|f^{(n-1)}(x)\right| \leq AM_n + BM_0$$

où A et B sont deux constantes. Ainsi :

$$\boxed{f^{(n-1)} \text{ est bornée sur } \mathbb{R}.}$$

2) La question précédente, agrémentée d'une récurrence, montre que $f^{(n-k)}$ est bornée, pour $k \in [\![1, n-1]\!]$; finalement

$$\boxed{\text{Toutes les } f^{(k)} \text{ sont bornées, pour } 0 \leq k \leq n.}$$

3) **a)** Si l'un des M_k était nul, $f^{(k)}$ serait la fonction nulle et f serait un polynôme. Or f est bornée sur $\mathbb{R}$ par hypothèse et les seuls polynômes bornés sur $\mathbb{R}$ sont les constantes. Mais f a été supposée non constante !

$$\boxed{\text{Pour tout } k \text{ tel que } 0 \leq k \leq n,\ M_k > 0.}$$

b) Je remarque que, pour $1 \leq k \leq n-1$, $\dfrac{u_{k+1}}{u_k} = 2\dfrac{M_{k-1}M_{k+1}}{M_k^2}$, or, d'après le **I-1)** appliqué à $f^{(k-1)}$ (qui est bien $\mathcal{C}^2$, puisque $k-1 \leq n-2$), j'ai

$$M_k \leq \sqrt{2M_{k-1}M_{k+1}} \quad \text{d'où} \quad \frac{u_{k+1}}{u_k} \geq 1.$$

Les hypothèses de la seconde question du préliminaire sont donc satisfaites, j'ai par conséquent

$$(u_1 \ldots u_k)^n \leq (u_1 \ldots u_n)^k$$

où, après hécatombe :

$$u_1 \ldots u_k = \frac{M_k}{M_0} \cdot 2^{\sum_{j=1}^{k}(j-1)} = \frac{M_k}{M_0} \cdot 2^{\frac{k(k-1)}{2}} \quad \text{et de même} \quad u_1 \ldots u_n = \frac{M_n}{M_0} \cdot 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

d'où

$$M_k^n \leq M_0^{n-k} M_n^k \cdot 2^{\frac{kn(n-1)}{2} - \frac{nk(k-1)}{2}} = 2^{\frac{kn(n-k)}{2}} M_0^{n-k} M_n^k.$$

Finalement, en élevant le tout à la puissance $1/n$:

$$\boxed{M_k \leq 2^{\frac{k(n-k)}{2}} M_0^{1-k/n} M_n^{k/n}.}$$

Pour $n = 3$ et $k = 1$, cette majoration s'écrit : $M_1 \leq 2 \cdot M_0^{2/3} M_1^{1/3}$

alors qu'au **I-2)** nous avions établi : $M_1 \leq \dfrac{9^{1/3}}{2} \cdot M_0^{2/3} M_1^{1/3}$ où $\dfrac{9^{1/3}}{2} < 2$ (puisque $9 < 4^3 = 64\ldots$).

En conclusion :

$$\boxed{\text{La majoration ci-dessus n'est pas la meilleure possible.}}$$

Problème B

Partie I – Produits infinis

1) Soit $x \in I$; j'ai

$$|p_n(x) - p_{n-1}(x)| = |p_{n-1}(x)\, u_n(x)| \leq A_{n-1}\alpha_n = A_n - A_{n-1}\ ,$$

cela pour tout x de I, donc par définition de N_∞

$$\boxed{N_\infty(p_n - p_{n-1}) \leq A_n - A_{n-1}.}$$

Pour montrer que la série de fonctions $\sum(p_n - p_{n-1})$ converge normalement, il suffit donc de montrer que la série numérique $\sum(A_n - A_{n-1})$ converge, c'est-à-dire que la suite (A_n) converge. Comme il est clair que cette suite est croissante (pour tout n, $A_{n+1} = A_n(1+\alpha_{n+1})$), il me suffit de prouver qu'elle est majorée ; j'utilise la majoration classique, fournie par la concavité de la fonction ln :

$$\forall t > -1 \quad \ln(1+t) \leq t.$$

Il en résulte que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \ln A_n = \sum_{k=0}^{n} \ln(1+\alpha_k) \leq \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k.$$

En effet cette dernière série converge, puisque par hypothèse la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement. Donc la suite (A_n) est croissante majorée (par $\exp\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty}\alpha_k\right)$) : elle converge, d'où

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \sum(p_n - p_{n-1}) \text{ converge normalement sur } I.}$$

Or $p_n = \sum\limits_{k=1}^{n}(p_k - p_{k-1}) + p_0$ et $\sum(p_n - p_{n-1})$ converge normalement, donc uniformément ; par conséquent :

$$\boxed{\text{La suite de fonctions } (p_n) \text{ converge uniformément sur } I.}$$

2) Pour $N \geq n_0$, je pose

$$S_N = \sum_{k=n_0}^{N} v_n \quad \text{où} \quad v_n = \ln(1+u_n)\,.$$

Soit $x \in I$; comme la série $\sum u_n(x)$ converge absolument, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) = 0$ et donc $v_n(x) \sim u_n(x)$, d'où la convergence absolue de la série $\sum\limits_{n\geq n_0} v_n(x)$: par conséquent, la série $\sum\limits_{n\geq n_0} v_n$ converge simplement sur I ; de plus, les v_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ et par hypothèse la série $\sum\limits_{n\geq n_0} v_n' = \sum\limits_{n\geq n_0}\dfrac{u_n'}{1+u_n}$ converge uniformément sur tout segment de I.

Grâce au théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions, j'en déduis que la suite de fonctions $(S_N)_{N\geq n_0}$ converge simplement sur I (et uniformément sur tout segment de I) vers $S = \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} v_n$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, telle que $S' = \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} v_n' = \sum\limits_{n=n_0}^{\infty}\dfrac{u_n'}{1+u_n}$. Or j'ai

$$\forall N \geq n_0 \quad p_N = \prod_{n=0}^{n_0-1}(1+u_n)\times e^{S_N}\ , \text{ d'où } \quad P = \prod_{n=0}^{n_0-1}(1+u_n)\times e^{S}.$$

D'après ce qui précède, P est de classe $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée logarithmique, en tout point x où P ne s'annule pas, est donnée par

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{n=0}^{n_0-1}\frac{u_n'(x)}{1+u_n(x)} + \frac{S'e^S}{e^S}(x) = \sum_{n=0}^{n_0-1}\frac{u_n'(x)}{1+u_n(x)} + \sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{u_n'(x)}{1+u_n(x)}.$$

En conclusion :

$$\boxed{P \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I \text{ et pour tout } x \text{ tel que } P(x)\neq 0,\ \frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_n'(x)}{1+u_n(x)}.}$$

Partie II – Applications

1) Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $z = x+iy$; pour n assez grand, la partie réelle $1+\dfrac{x}{n}$ de $1+\dfrac{z}{n}$ est strictement positive et alors

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \rho_n e^{i\theta_n} \quad \text{avec} \quad \rho_n = \left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2\right)^{n/2} \text{ et } \theta_n = n\arctan\frac{y}{n+x}.$$

J'ai, pour n au voisinage de l'infini,

$$\ln\rho_n = \frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{2x}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = x + o(1) \quad \text{et} \quad \theta_n \sim y\ ,$$

donc les suites (ρ_n) et $\left(e^{i\theta_n}\right)$ convergent respectivement vers e^x et e^{iy}, d'où :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z.}$$

2) $2\lambda/i$ n'étant pas racine de Q_λ, je cherche les racines de Q_λ dans $\mathbb{C}\setminus\{2\lambda/i\}$.

Soit $z\neq 2\lambda/i$: $Q_\lambda(z) = 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{1+iz/2\lambda}{1-iz/2\lambda}\right)^{2\lambda} = 1.$

Donc si z est racine de Q_λ, nécessairement $Z = \dfrac{1+iz/2\lambda}{1-iz/2\lambda}$ est une racine 2λ-ième de 1 dans $\mathbb{C}$, il existe par conséquent k dans $\mathbb{Z}$ tel que $Z = e^{2i\theta_k}$; par périodicité, je peux choisir k dans $\{1-\lambda,\dots,\lambda\}$, or Z ne peut valoir -1 (car $-1 \neq 1$), donc k ne peut valoir λ. Il en résulte l'implication de gauche à droite ci-dessous, la réciproque étant immédiate :

$$\begin{aligned} Q_\lambda(z) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \{1-\lambda,\dots,\lambda-1\} \quad \frac{1+iz/2\lambda}{1-iz/2\lambda} = e^{2i\theta_k} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \{1-\lambda,\dots,\lambda-1\} \quad z = \frac{2\lambda}{i}\cdot\frac{e^{2i\theta_k}-1}{e^{2i\theta_k}+1} = 2\lambda\tan\theta_k \end{aligned}$$

Une fonction homographique étant injective, j'ai trouvé $2\lambda-1$ racines distinctes de Q_λ, qui est de degré $2\lambda-1$; remarquant que l'ensemble de ces racines est symétrique par rapport à 0, je peux regrouper deux par deux celles qui sont non nulles. J'obtiens ainsi l'existence de deux constantes complexes a et b telles que :

$$Q_\lambda(X) = aX\prod_{k=1}^{\lambda-1}\left(X^2 - 4\lambda^2\tan^2\theta_k\right) = bX\prod_{k=1}^{\lambda-1}\left(1 - \frac{X^2}{4\lambda^2\tan^2\theta_k}\right).$$

$Q_\lambda(x) \underset{0}{\sim} bx$, par conséquent b n'est autre que $Q'_\lambda(0)$, qui vaut – par définition de Q_λ – $\dfrac{1}{2i}(i+i) = 1$. Donc $b = 1$ et finalement

$$\boxed{Q_\lambda(X) = X\prod_{k=1}^{\lambda-1}\left(1 - \frac{X^2}{4\lambda^2\tan^2\theta_k}\right).}$$

3) Par définition de u_k, j'ai

$$\forall k \in \{1,\dots,\lambda-1\} \quad u_k(\lambda) = -\frac{x^2}{4\lambda^2\tan^2\theta_k} \quad \text{et} \quad \forall k \geq \lambda \quad u_k(\lambda) = 0.$$

D'où le "produit infini" suivant, puisque tous les facteurs valent 1 à partir d'un certain rang :

$$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{N}^* \quad Q_\lambda(x) = x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + u_k(\lambda)\right).}$$

Soit donc $P : t \mapsto \displaystyle\prod_{k=0}^{\infty}(1+u_k(t))$ (où u_0 est la fonction constante $t \mapsto x-1$) ; pour tout k, u_k est bornée sur $\mathbb{R}^+$; pour $k \geq 1$, $|u_k|$ est nulle sur $[0,k]$ et, de l'inégalité : $\forall \varphi \in [0,\pi/2[\quad \tan\varphi \geq \varphi$, due à la convexité de la fonction tan sur $[0,\pi/2[$, je déduis :

$$\forall t > k \quad |u_k(t)| \leq \frac{x^2}{4t^2\left(\frac{k\pi}{2t}\right)^2} = \frac{x^2}{k^2\pi^2}.$$

Comme la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1}\frac{x^2}{k^2\pi^2}$ converge (car $2>1$), la série de fonctions $\sum u_k$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}^+$; avec les notations et les résultats du **I,** j'en déduis que la suite de fonctions (p_n) converge uniformément vers P sur $\mathbb{R}^+$; de plus, comme $\tan\varphi \underset{0}{\sim} \varphi$,

$$\lim_{\lambda\to+\infty} u_0(\lambda) = x-1 \quad \text{et} \quad \forall k \geq 1 \quad \lim_{\lambda\to+\infty} u_k(\lambda) = -\frac{x^2}{k^2\pi^2},$$

donc

$$\forall n \geq 1 \quad \lim_{\lambda\to+\infty} p_n(\lambda) = x\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$$

Le théorème de la double limite montre alors que P admet pour limite en $+\infty$ la limite de la suite $(\lim p_n(\lambda))$; autrement dit, puisque $P(\lambda) = Q_\lambda(x)$:

$$\lim_{\lambda\to+\infty} Q_\lambda(x) = x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

Or, par ailleurs, d'après le **1),** $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} Q_\lambda(x) = \tfrac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) = \sin x$.

En conclusion :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin x = x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).}$$

4) Soit maintenant (U_n) la suite de fonctions définie par :

$$U_0 : x \mapsto x - 1 \quad \text{et} \quad U_n : x \mapsto -\frac{x^2}{n^2\pi^2}.$$

Les fonctions U_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, la série de fonctions $\sum U_n$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}$ (en effet, pour tout $A > 0$, $\sup\limits_{[-A,A]} |U_n| = \dfrac{A^2}{n^2\pi^2}$). De plus, toujours sur $[-A, A]$, $1 + U_n$ est à valeurs strictement positives dès que $n > \dfrac{A}{\pi}$; si c'est le cas, j'ai, pour tout $n \geq 1$,

$$\forall x \in [-A, A] \quad \frac{U_n'}{1 + U_n}(x) = -\frac{2x}{n^2\pi^2 - x^2} \quad \text{et} \quad \left|\frac{U_n'}{1 + U_n}(x)\right| \leq \frac{2A}{n^2\pi^2 - A^2}.$$

Le résultat du **I-2)** s'applique donc, avec ici $P = \sin$, d'après la question précédente ; la relation souhaitée est ainsi établie pour tout x de $[-A, A]$ tel que $\sin x \neq 0$, ceci pour tout $A > 0$, d'où finalement, puisque $\dfrac{P'}{P} = \cot$ et $\dfrac{U_0'}{1 + U_0} = \dfrac{1}{x}$:

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z} \quad \cot x = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2\pi^2 - x^2}.}$$