Analyse 1

Problème A

Préliminaire

On dira qu'une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bornée par un réel K si la fonction $|\varphi|$ est majorée par K :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |\varphi(x)| \leq K.$$

1) Soit m un entier supérieur ou égal à 1. En calculant de deux façons différentes le développement limité à l'ordre m à l'origine de la fonction $(e^x - 1)^m$, montrer que :

$$\sum_{k=1}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} k^j = \begin{cases} 0 & \text{si } j \text{ est un entier entre } 1 \text{ et } m-1, \\ m! & \text{si } j = m \end{cases} .$$

2) Prouver que si (u_k) est une suite croissante de réels strictement positifs et k, n des entiers tels que $1 \leq k \leq n$, on a :

$$\left(u_1 u_2 \dots u_k\right)^n \leq \left(u_1 u_2 \dots u_n\right)^k .$$

3) <u>*Inégalité de Taylor-Lagrange*</u>

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I, telle que $f^{(n+1)}$ soit bornée sur I.
Grâce à la formule de Taylor avec reste intégral, démontrer que :

$$\forall (a,b) \in I^2 \quad \left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \sup_I \left| f^{(n+1)} \right|$$

(inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n entre a et b).

Partie I

1) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que f et f'' soient bornées sur $\mathbb{R}$, respectivement par M_0 et M_2.

a) En écrivant, pour $h > 0$, l'inégalité de Taylor-Lagrange entre x et $x+h$ et entre x et $x-h$, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \left|f'(x)\right| \leq \frac{M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}.$$

b) En déduire que f' est bornée par $\sqrt{2M_0M_2}$.

2) **a)** Montrer de même que, si f est de classe $\mathcal{C}^3$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que f et $f^{(3)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$ respectivement par M_0 et M_3, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \left|f'(x)\right| \leq \frac{1}{2}\left(9M_0^2 M_3\right)^{1/3}.$$

b) f'' est-elle également bornée sur $\mathbb{R}$?

Partie II

Dans cette partie, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Soit f une fonction, non constante, de classe $\mathcal{C}^n$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que f et $f^{(n)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$ respectivement par M_0 et M_n.

1) En utilisant la question **1)** du préliminaire ainsi que l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n appliquée à la fonction f entre les valeurs x et $x+h$ pour $h = 1, 2, \dots, n-1$, montrer que la fonction $f^{(n-1)}$ est, elle aussi, bornée sur $\mathbb{R}$.

2) En déduire que toutes les dérivées $f^{(k)}$ sont bornées pour $0 \leq k \leq n$. On note alors $M_k = \sup_{\mathbb{R}} \left|f^{(k)}\right|$.

3) **a)** Montrer que pour tout entier k tel que $0 \le k \le n$, on a $M_k > 0$.

b) En utilisant la suite finie $(u_k)_{1 \le k \le n}$ avec $u_k = 2^{k-1}\dfrac{M_k}{M_{k-1}}$, en déduire que pour tout entier k entre 0 et n, on a :

$$M_k \le 2^{\frac{k(n-k)}{2}} M_0^{1-k/n} M_n^{k/n}.$$

Est-ce la meilleure majoration possible ?

Problème B

Partie I – Produits infinis

Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et N_∞ la norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées de I dans $\mathbb{K}$.

Étant donnée une suite (u_n) d'applications de I dans $\mathbb{K}$, on définit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, l'application

$$p_n = \prod_{k=0}^{n} (1 + u_k) \quad \text{par} \quad p_n : x \mapsto \prod_{k=0}^{n} \big(1 + u_k(x)\big).$$

1) On suppose que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur I et l'on pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha_n = N_\infty(u_n) \quad \text{et} \quad A_n = \prod_{k=0}^{n} (1 + \alpha_k).$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad N_\infty(p_n - p_{n-1}) \le A_n - A_{n-1}$.

En déduire que la série de fonctions $\sum\limits_{n \ge 1} (p_n - p_{n-1})$ converge normalement sur I, puis que la suite de fonctions (p_n) converge uniformément sur I ; la limite de cette suite est alors notée $P = \prod\limits_{k=0}^{\infty} (1 + u_k)$.

2) On suppose en outre que les u_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et que, pour un certain entier n_0, $1 + u_n$ est à valeurs strictement positives pour tout $n \ge n_0$ et la série de fonctions $\sum\limits_{n \ge n_0} \dfrac{u_n'}{1 + u_n}$ converge normalement sur tout segment inclus dans I.

Montrer que P est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et que, si $P(x) \ne 0$, alors :

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n'(x)}{1 + u_n(x)}.$$

(On pourra utiliser la série de fonctions $\sum\limits_{n \ge n_0} v_n$ où $v_n = \ln(1 + u_n)$.)

Partie II – Applications

1) Pour z fixé dans $\mathbb{C}$, établir : $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n = e^z$.

2) Pour λ fixé dans $\mathbb{N}^*$, on pose : $Q_\lambda(X) = \dfrac{1}{2i}\left[\left(1 + \dfrac{iX}{2\lambda}\right)^{2\lambda} - \left(1 - \dfrac{iX}{2\lambda}\right)^{2\lambda}\right]$ et $\forall k \in \mathbb{Z} \quad \theta_k = \dfrac{k\pi}{2\lambda}$.

Montrer que : $Q_\lambda(X) = X \cdot \prod\limits_{k=1}^{\lambda-1} \left(1 - \dfrac{X^2}{4\lambda^2 \tan^2 \theta_k}\right)$.

3) Soit x fixé dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'on peut écrire

$$\forall\lambda\in\mathbb{N}^*\quad Q_\lambda\left(x\right)=x\cdot\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+u_k\left(\lambda\right)\right)\quad\text{où}\quad u_k:t\mapsto\begin{cases}0 & \text{si } t\in[0,k]\\ -\dfrac{x^2}{4t^2\tan^2\dfrac{k\pi}{2t}} & \text{si } t>k\end{cases}.$$

En déduire, à l'aide de la partie **I** et du théorème de la double limite, que

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad\sin x=x\cdot\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

4) En déduire que : $\forall x\in\mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}\quad\cot x=\dfrac{1}{x}-\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{n^2\pi^2-x^2}$.