X-ENS 2015 PC Maths

Première partie

1a. Notons $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est le sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ engendré par les matrices $(E_{i,i})_{1\leq i\leq n}$ et $(E_{i,j}+E_{j,i})_{1\leq i<j\leq n}$. Et lesdites matrices forment une famille libre (immédiat du fait que la famille $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est libre). Or elles sont au nombre de $n+\dfrac{(n-1)n}{2}=\dfrac{n(n+1)}{2}$. Ainsi

$$\boxed{\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ de dimension } \frac{n(n+1)}{2}.}$$

En vertu du théorème spectral, toute matrice A de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable et semblable à une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La liste des éléments diagonaux de D est formée des valeurs propres de A répétées selon leur multiplicité. Comme ces valeurs sont réelles, il suffit de les ordonner pour obtenir $s^{\downarrow}(A)$.

$$\boxed{s^{\downarrow} \text{ est bien défini sur } \mathcal{S}_n(\mathbb{R}).}$$

1b. Si $n=1$, l'application $s^{\downarrow}$ est l'identité et elle est linéaire. Pour $n\geq 2$ le résultat est faux. Prenons D matrice diagonale, d'éléments diagonaux $1,0,\dots,0$. J'ai $s^{\downarrow}(D)=(1,0,\dots,0)$. Le spectre de $-D$ est $\{-1,0,\dots,0\}$ et $s^{\downarrow}(-D)=(0,\dots,0,-1)\neq -s^{\downarrow}(D)$.

$$\boxed{\text{L'application } s^{\downarrow} \text{ n'est pas linéaire.}}$$

1c. Si $M\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, et si $s^{\downarrow}(M)=(m_1,\dots,m_n)$, les valeurs propres de $-M$ sont $\{-m_1,\dots,-m_n\}$ et, en les réordonnant,

$$\boxed{s^{\downarrow}(-M)=(-m_n,\dots,-m_1).}$$

1d. Soit $M=\begin{pmatrix}\lambda & h\\ h & \mu\end{pmatrix}\in\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. J'ai : $\chi_A(t)=t^2-t\operatorname{Tr}M+\det M=t^2-t(\lambda+\mu)+\lambda\mu-h^2$.
$\Delta=(\lambda+\mu)^2-4\lambda\mu+4h^2=(\lambda-\mu)^2+4h^2\geq 0$ (comme prévu !). D'où les deux racines :

$$\boxed{s^{\downarrow}(M)=(t_1,t_2)\quad \text{où}\quad t_2=\frac{\lambda+\mu-\sqrt{(\lambda-\mu)^2+4h^2}}{2}\leq t_1=\frac{\lambda+\mu+\sqrt{(\lambda-\mu)^2+4h^2}}{2}.}$$

2a. Soit $M\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$et $m=s^{\downarrow}(M)$ son spectre ordonné. Toujours grâce au théorème spectral, je dispose d'une base **orthonormale** de vecteurs propres de M, $(v_1,\dots,v_n)$ associés aux valeurs propres $m_1,\dots,m_n$. Pour tout vecteur v_k, $1\leq k\leq n$, j'ai :

$$\left(\sum_{i=1}^n m_i v_i {}^t v_i\right)v_k=\sum_{i=1}^n m_i v_i {}^t v_i v_k.$$

Or la matrice carrée d'ordre 1 ${}^t v_i v_k$ s'identifie au produit scalaire $\langle v_i,v_k\rangle$, d'où, comme la base (v_i) est orthonormale :

$$\left(\sum_{i=1}^n m_i v_i {}^t v_i\right)v_k=m_k v_k=Mv_k.$$

Les deux applications linéaires $x\mapsto Mx$ et $x\mapsto\left(\sum_{i=1}^n m_i v_i {}^t v_i\right)x$ coïncident sur une base. Elles sont égales et ont donc même matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Par suite :

$$\boxed{M=\sum_{i=1}^n m_i v_i {}^t v_i.}$$

N.B. : on peut aussi remarquer que, comme v_i est unitaire, la matrice $v_i {}^t v_i$ n'est autre que la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur la droite $\operatorname{Vect} v_i$...

2b. Soit $x\in\mathbb{R}^n$. En le décomposant sur la base $(v_1,\dots,v_n)$, $x=\sum_{i=1}^n y_i v_i$.
$Mx=\sum_{i=1}^n y_i m_i v_i$ et, comme on est dans une base orthonorm´ee, $\langle x,Mx\rangle=\sum_{i=1}^n m_i y_i^2$.
Comme $m_1\geq\cdots\geq m_n$ et que $y_i^2\geq 0$ j'ai :

$$\forall x\in\mathbb{R}^n,\ \langle x,Mx\rangle\leq\sum_{i=1}^n m_1 y_i^2=m_1||x||^2$$

En particulier
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, ||x|| = 1 \Rightarrow \langle x, Mx\rangle \leq m_1.$$
En prenant $x = v_1$ qui est bien de norme 1, j'ai alors $\langle v_1, Mv_1\rangle = m_1$. Par suite (c'est même un max) :
$$\boxed{\sup_{||x||=1} \langle x, Mx\rangle = m_1.}$$

2c. Soit j un entier, $1 \leq j \leq n$. $\mathcal{V}_j = \text{Vect}\,(v_1, \ldots, v_j)$. Comme dans la question précédente, pour $x = \sum\limits_{i=1}^{j} y_i v_i$ vecteur quelconque de de norme 1 de $\mathcal{V}_j$:
$$\langle x, Mx\rangle = \sum_{i=1}^{j} m_i y_i^2 \geq m_j \left(\sum_{i=1}^{j} y_j^2\right) = m_j ||x||^2 = m_j.$$
En prenant $x = v_j$, vecteur de norme 1 de $\mathcal{V}_j$: $\langle x, Mx\rangle = m_j$. J'ai donc :
$$\inf_{x\in\mathcal{V}_j,\, ||x||=1} \langle x, Mx\rangle = m_j.$$
De même avec $\mathcal{W}_j = \text{Vect}\,(v_j, v_{j+1}, \ldots, v_n)$, en majorant les quantités étudiées :
$$\boxed{\sup_{x\in\mathcal{W}_j,\, ||x||=1} \langle x, Mx\rangle = m_j.}$$

3a. Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ tels que $\dim\mathcal{U} + \dim\mathcal{V} > n$. On sait que :
$$\dim(\mathcal{U} + \mathcal{V}) + \dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = \dim\mathcal{U} + \dim\mathcal{V}.$$
Si j'avais $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \{0\}$ j'aurais $\dim(\mathcal{U} + \mathcal{V}) > n$, impossible pour un sev de $\mathbb{R}^n$. Donc
$$\boxed{\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \text{ ne se réduit pas à } \{0\}.}$$

3b. Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $m = s^{\downarrow}(M)$. Soit j un entier, $1 \leq j \leq n$, et $\mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension j. D'après la question précédente $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}_j$ contient au moins un vecteur non nul. Comme c'est un sev, il contient au moins un vecteur x_0 de norme 1. Par définition, comme $x_0 \in \mathcal{V}$ et est de norme 1 :
$$\inf_{x\in\mathcal{V},\, ||x||=1} \langle x, Mx\rangle \leq \langle x_0, Mx_0\rangle.$$
Mais $x_0 \in \mathcal{W}_j$ et est de norme 1, donc :
$$\langle x_0, Mx_0\rangle \leq \sup_{x\in\mathcal{W}_j,\, ||x||=1} \langle x, Mx\rangle = m_j.$$
En réunissant les deux inégalités j'ai bien :
$$\boxed{\inf_{x\in\mathcal{V},\, ||x||=1} \langle x, Mx\rangle \leq m_j.}$$

3c. Pour $\mathcal{V}$ sev de $\mathbb{R}^n$, notons $\varphi(\mathcal{V}) = \inf\limits_{x\in\mathcal{V},\, ||x||=1} \langle x, Mx\rangle$. Soit $\mathcal{E}_j$ l'ensemble des sous-espaces de dimension j de $\mathbb{R}^n$. Nous venons de voir que, pour tout $\mathcal{V}$ de $\mathcal{E}_j$, $\varphi(\mathcal{V}) \leq m_j$. J'ai donc par définition de la borne supérieure d'un ensemble non vide et majoré de réels :
$$\sup_{\mathcal{V}\in\mathcal{E}_j} \varphi(\mathcal{V}) \leq m_j.$$
J'ai donc :
$$\sup_{\mathcal{V}\in\mathcal{E}_j} \left(\inf_{x\in\mathcal{V},\, ||x||=1} \langle x, Mx\rangle\right) \leq m_j.$$
Mais pour $\mathcal{V} = \mathcal{V}_j$, la valeur m_j est atteinte et c'est la borne supérieure.
$$\boxed{\sup_{\mathcal{V}\in\mathcal{E}_j} \left(\inf_{x\in\mathcal{V},\, ||x||=1} \langle x, Mx\rangle\right) = m_j.}$$

Remarquons que le même raisonnement peut être fait avec $\mathcal{W}$ sev de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n-j+1$ et j'ai alors :

$$\inf_{\mathcal{W}\in\mathcal{E}_{n-j+1}}\left(\sup_{x\in\mathcal{W},\,||x||=1}\langle x, Mx\rangle\right)=m_j.$$

(borne atteinte pour $\mathcal{W}=\mathcal{W}_j$). Ce résultat peut aussi être obtenu en utilisant la matrice $-M$.

4a. Soient L, $M\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $(0,\dots,0)\preccurlyeq s^{\downarrow}(M-L)$. Les valeurs propres de $M-L$ sont donc toutes positives. Notons $s^{\downarrow}(M-L)=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$. J'ai vu dans les questions précédentes que, pour tout vecteur x de norme 1,

$$0\le\alpha_n\le\langle x,(M-L)x\rangle\le\alpha_1.$$

Soit $\mathcal{V}$ un sev quelconque de dimension j de $\mathbb{R}^n$ et soit x un vecteur de norme 1 de $\mathcal{V}$; j'ai par linéarité à droite

$$\langle x,(M-L)x\rangle+\langle x,Lx\rangle=\langle x,Mx\rangle.$$

D'où

$$0+\inf_{y\in V,||y||=1}\langle y,Ly\rangle\le\langle x,(M-L)x\rangle+\langle x,Lx\rangle=\langle x,Mx\rangle.$$

Par définition de la borne supérieure (plus grand des minorants) j'ai :

$$\inf_{y\in V,||y||=1}\langle y,Ly\rangle\le\inf_{x\in V,||x||=1}\langle x,Mx\rangle\le\sup_{\mathcal{V}\in\mathcal{E}_j}\left(\inf_{x\in\mathcal{V},\,||x||=1}\langle x,Mx\rangle\right)=m_j.$$

Et finalement :

$$\ell_j=\sup_{\mathcal{V}\in\mathcal{E}_j}\left(\inf_{y\in V,||y||=1}\langle y,Ly\rangle\right)\le m_j.$$

J'ai donc :

$$\boxed{s^{\downarrow}(L)\preccurlyeq s^{\downarrow}(M).}$$

4b. Soit α une valeur propre de $\|M\|\,I_n-M$ et x un vecteur propre associé de norme 1.

$$(||M||I_n-M)x=\alpha x=||M||x-Mx$$

d'où

$$Mx=(||M||-\alpha)x\quad\text{et}\quad ||Mx||=|\|M\|-\alpha|\cdot||x||=|\|M\|-\alpha|\,.$$

Or, par définition de $\|M\|$, $||Mx||\le||M||$. J'ai donc : $|\|M\|-\alpha|\le\|M\|$. De plus $\|M\|-\alpha\le|\|M\|-\alpha|\le\|M\|$ donc $\alpha\ge0$.
Toutes les valeurs propres de $\|M\|\,I_n-M$ sont positives et j'ai donc

$$\boxed{\forall M\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ (0,\dots,0)\preccurlyeq s^{\downarrow}\left(\|M\|\,I_n-M\right).}$$

4c. Soient L, $M\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, je note $m=s^{\downarrow}(M)$ et $\ell=s^{\downarrow}(L)$. D'après la question précédente $(0,\dots,0)\preccurlyeq s^{\downarrow}\left(\|L-M\|\,I_n-(L-M)\right)$ et d'après la question **4a** $s^{\downarrow}(L-M)\preccurlyeq s^{\downarrow}(\|L-M\|\,I_n)$. Si je note $s^{\downarrow}(L-M)=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, comme $\|L-M\|\,I_n$ possède une seule valeur propre égale à $\|L-M\|$, j'ai $\alpha_n\le\dots\le\alpha_1\le\|L-M\|$. Soit $j\in[[1,n]]$. J'ai $\dim\mathcal{V}_j(L)+\dim\mathcal{W}_j(M)=n+1>n$. Il existe donc au moins un vecteur non nul (que l'on peut choisir de norme 1) dans l'intersection de ces deux espaces. Soit x un tel vecteur. Je sais que :

$$\langle x,Lx\rangle\ge\ell_j\quad\text{et}\quad\langle x,Mx\rangle\le m_j$$

d'où

$$\ell_j-m_j\le\langle x,Lx\rangle-\langle x,Mx\rangle=\langle x,(L-M)x\rangle\le\alpha_1\le||L-M||.$$

En échangeant le rôle de L et M j'ai aussi $\ell_j-m_j\le\|M-L\|=\|L-M\|$. Finalement :

$$\forall j\in[[1,n]],\ |\ell_j-m_j|\le\|L-M\|\,.$$

Il en résulte que

$$\boxed{\max_{1\le j\le n}|\ell_j-m_j|\le\|L-M\|.}$$

4d. Prenons dans $\mathbb{R}^n$ la norme $\|\cdot\|_\infty$ associée à la base canonique. On vient de montrer que

$$\left\|s^{\downarrow}(L)-s^{\downarrow}(M)\right\|_\infty\le\|L-M\|$$

cela pour tous L, M dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\text{La fonction } s^{\downarrow}:\mathcal{S}_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^n \text{ est lipschitzienne donc continue.}}$$

5a. Soit $M \in \mathcal{S}_n^\dagger(\mathbb{R})$. Soit $m = s^\downarrow(M)$. J'ai donc $m_1 > m_2 > \cdots > m_n$. Soit $r > 0$ et L élément de la boule ouverte de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ centrée en M et de rayon r. Avec les notations précédentes : $\forall j \in [[1, n]]$, $|\ell_j - m_j| \leq \|L - M\| < r$. J'ai donc : pour tout $j > 1$, $m_j - r < \ell_j < m_j + r$. Pour que les valeurs propres de L soient distinctes il suffit que les intervalles $]m_j - r, m_j + r[$ soient distincts. Comme $m_1 > m_2 > \cdots > m_n$ il suffit que j'aie, pour tout j, $m_j + r < m_{j-1} - r$. Soit donc $\varepsilon = \min\{m_1 - m_2, m_2 - m_3, \ldots, m_{n-1} - m_n\}$. Je sais que $\varepsilon > 0$. Prenons $r = \varepsilon/3$. J'ai pour tout j, $2r = 2\varepsilon/3 < \varepsilon \leq m_j - m_{j-1}$. La boule ouverte de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ centrée en M et de rayon r est incluse dans $\mathcal{S}_n^\dagger(\mathbb{R})$. En conclusion, par définition,

$$\boxed{\mathcal{S}_n^\dagger(\mathbb{R}) \text{ est un ouvert de } \mathcal{S}_n(\mathbb{R}).}$$

5b. La première composante $s_1^\downarrow$ de $s^\downarrow$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{S}_2^\dagger(\mathbb{R})$ car sur cet ensemble le discriminant Δ du polynôme caractéristique reste strictement positif et j'ai alors une composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Ce résultat ne tient plus sur $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. Prenons en effet les matrices de la forme $M(h) = \begin{pmatrix} 0 & h \\ h & 0 \end{pmatrix}$. J'ai $s_1^\downarrow\big(M(h)\big) = |h|$ car les valeurs propres de $M(h)$ sont h et $-h$. Comme la fonction $h \mapsto M(h)$ est $\mathcal{C}^1$ à valeurs dans $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ tandis que la fonction $h \mapsto |h|$ n'est pas dérivable en 0, c'est que $s_1^\downarrow$ n'est pas $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

Deuxième partie

6a. Pour une matrice diagonalisable, sa trace est égale à la somme de ses valeurs propres. Donc directement par linéarité de la trace :

$$\boxed{\mathrm{Tr}(C) = \sum_{i=1}^{n} c_i = \mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i.}$$

6b. Soit x vecteur propre de C, de norme 1, associé à c_1. Je peux écrire :

$$\boxed{c_1 = \langle x, Cx\rangle = \langle x, Ax\rangle + \langle x, Bx\rangle \leq a_1 + b_1.}$$

6c. De même en prenant un vecteur propre unitaire de C associé à sa plus petite valeur propre c_n j'obtiens

$$\boxed{a_n + b_n \leq c_n.}$$

7a. Soient $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ trois sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ tels que

$$\dim \mathcal{U} + \dim \mathcal{V} + \dim \mathcal{W} > 2n.$$

J'ai en utilisant la relation de Grassmann : $\dim(\mathcal{U} + \mathcal{V}) + \dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) + \dim \mathcal{W} > 2n$. Donc

$$\dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) + \dim(\mathcal{W}) > 2n - \dim(\mathcal{U} + \mathcal{V}) \quad \text{d'où} \quad \dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) + \dim(\mathcal{W}) > n$$

car $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ est un sev de $\mathbb{R}^n$ donc de dimension n au maximum. Le résultat de la question **3a** permet d'affirmer que

$$\boxed{\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \cap \mathcal{W} \text{ n'est pas réduit à } \{0\}.}$$

7b. Considérons une résolution spectrale de chacune des matrices A, B et C et notons $\mathcal{V}_j(A)$, $\mathcal{V}_j(B)$ et $\mathcal{V}_j(C)$ les espaces associés. (même notation avec les espaces $\mathcal{W}_j$). Soit j et k deux entiers positifs vérifient $j + k \leq n + 1$, j'ai :
$\dim(\mathcal{W}_j(A)) = n - j + 1$, $\dim \mathcal{W}_k(B) = n - k + 1$, $\dim \mathcal{V}_{j+k-1} = j + k - 1$.
La somme des dimensions des trois sev est $2n + 1$. D'après la question précédente il existe au moins un vecteur non nul dans l'intersection. Donc au moins un vecteur de norme 1. Soit x un tel vecteur : $x \in \mathcal{W}_j(A))$ donc $\langle x, Ax\rangle \leq a_j$; $x \in \mathcal{W}_k(B))$ donc $\langle x, Bx\rangle \leq a_k$; et $x \in \mathcal{V}_{j+k-1}(C))$ donc $\langle x, Cx\rangle \geq c_{j+k-1}$; il en résulte :

$$\boxed{c_{j+k-1} \leq \langle x, (A+B)x\rangle = \langle x, Ax\rangle + \langle x, Bx\rangle \leq a_j + b_k.}$$

On peut raisonner de même avec les matrices $-A$ et $-B$. Notons $a' = s^{\downarrow}(-A)$, $b' = s^{\downarrow}(-B)$ et $c' = s^{\downarrow}(-A-B)$. J'ai , avec les mêmes hypothèses :

$$c'_{j+k-1} \leq a'_j + b'_k \quad \text{avec} \quad a'_j = -a_{n-j},\ b'_k = -b_{n-k},\ c'_r = -c_{n-r}$$

Donc $-c_{n-(j+k-1)} \leq -a_{n-j} - b_{n-k}$ et $c_{n-(j+k-1)} \geq a_{n-j} + b_{n-k}$. En prenant $j' = n - j$ élément quelconque de $[\![1,n]\!]$ et $k \in [\![1,n]\!]$ tel que $j + k = n - j' + k \leq n+1$ (choix toujours possible) j'obtiens : $c_{j'-k+1} \geq a_{j'} + b_k \geq a_{j'} + b_n$. Prenons $k = 1$; $j + k = n - j + 1 \leq n + 1$ et donc $c_{j'} \geq a_{j'} + b_n$ avec j' entier quelconque de $[\![1,n]\!]$. Ainsi

$$\boxed{\forall j \in [\![1,n]\!] \quad a_j + b_n \leq c_j.}$$

8a. Notons $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Cette base est orthonormale. J'ai : $Ae_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,1}e_i$ et $a_{1,1} = \langle Ae_1, e_1\rangle = \langle e_1, Ae_1\rangle$. Or, pour tout vecteur x de norme 1, $\langle x, Ax\rangle \leq a_1$. En particulier :

$$\boxed{a_{1,1} \leq a_1.}$$

8b. Soient j et k des entiers positifs tels que $1 \leq j < k$ et $s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_k$ des réels. On a défini $\mathcal{D}_{j,k} = \left\{(t_1,\dots,t_k) \in [0,1]^k \ / \ t_1 + \cdots + t_k = j\right\}$ et f la fonction de $\mathcal{D}_{j,k}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(t_1,\dots,t_k) = \sum_{i=1}^{k} s_i t_i.$$

Notons $G = \sum\limits_{i=1}^{j} s_i - f(t_1,\dots,t_k)$ et $D = \sum\limits_{i=1}^{j} (s_i - s_j)(1-t_i)$.

$$G = \sum_{i=1}^{j} s_i - \sum_{i=1}^{j} t_i s_i - \sum_{i=j+1}^{k} s_i t_i = \sum_{i=1}^{j} s_i(1-t_i) - \sum_{i=j+1}^{k} s_i t_i.$$

Mais pour $i \geq j + i$, $s_i \leq s_j$ et $t_i \geq 0$ donc $s_i t_i \leq s_j t_i$. En passant aux opposés :

$$G \geq \sum_{i=1}^{j} s_i(1-t_i) - \sum_{i=j+1}^{k} s_j t_i = \sum_{i=1}^{j} s_i(1-t_i) - s_j \sum_{i=j+1}^{k} t_i = \sum_{i=1}^{j} s_i(1-t_i) - s_j(j - (t_1 + \cdots + t_i))$$

et

$$G \geq \sum_{i=1}^{j} s_i(1-t_i) + \sum_{i=1}^{j} s_j t_i - s_j \sum_{i=1}^{j} 1 = \sum_{i=1}^{j} s_i(1-t_i) + \sum_{i=1}^{j} s_j(t_i - 1) = \sum_{i=1}^{j} (s_i - s_j)(1-t_i) = D.$$

J'ai bien démontré que, pour tout $(t_1,\dots,t_k) \in \mathcal{D}_{j,k}$,

$$\boxed{\sum_{i=1}^{j} s_i - f(t_1,\dots,t_k) \geq \sum_{i=1}^{j} (s_i - s_j)(1-t_i).}$$

La quantité minorante est positive. Donc $f(t_1,\dots,t_k) \leq \sum\limits_{i=1}^{j} s_i$. En prenant $t_1 = \cdots = t_j = 1$ et $t_{j+1} = \cdots = t_k = 0$ j'ai $f(t_1,\dots,t_k) = \sum\limits_{i=1}^{j} s_i$. Par suite (puisque c'est un max !) :

$$\boxed{\sup_{\mathcal{D}_{j,k}} f = \sum_{i=1}^{j} s_i.}$$

8c. Pour tout i je décompose e_i dans la base orthonormale $(v_1,\dots,v_n)$ de vecteurs propres attachés à A.

$$e_i = \sum_{k=1}^{n} \langle e_i, v_k\rangle\, v_k \ ; \quad Ae_i = \sum_{k=1}^{n} \langle e_i, v_k\rangle\, a_k v_k \quad \text{d'où} \quad a_{i,i} = \langle e_i, Ae_i\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle e_i, v_k\rangle^2 a_k.$$

Soit j dans $[\![1,n]\!]$:

$$\sum_{i=1}^{j} a_{i,i} = \sum_{i=1}^{j} \left(\sum_{k=1}^{n} \langle e_i, v_k\rangle^2 a_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j} \langle e_i, v_k\rangle^2\right) a_k.$$

Notons, pour chaque k, $t_k = \sum\limits_{i=1}^{j} \langle e_i, v_k\rangle^2 \geq 0$. J'ai $\sum\limits_{i=1}^{n} \langle e_i, v_k\rangle^2 = \|v_k\|^2 = 1$ donc $t_k \leq 1$. En effet, comme la base $(e_1, \dots, e_n)$ est orthonormale, pour tout k, $v_k = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle e_i, v_k\rangle e_i$. De plus

$$\sum_{k=1}^{n} t_k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} \langle e_i, v_k\rangle^2 = \sum_{i=1}^{j}\left(\sum_{k=1}^{n} \langle e_i, v_k\rangle^2\right) = \sum_{i=1}^{j} \|e_i\|^2 = \sum_{i=1}^{j} 1 = j.$$

On est donc exactement dans les hypothèses de la question **8b** et, pour tout j de $[\![1, n]\!]$,

$$\boxed{\sum_{i=1}^{j} a_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} t_k a_k \leq \sum_{k=1}^{j} a_k.}$$

8d. La démonstration précédente se transpose à n'importe quelle famille orthonormale $(x_1, \dots, x_n)$ de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $\sum\limits_{i=1}^{j} \langle x_i, Ax_i\rangle \leq \sum\limits_{i=1}^{j} a_j$.

Dans le cas où la base est $(v_1, \dots, v_n)$, la somme est égale à $\sum\limits_{i=1}^{j} a_j$. J'ai donc bien pour tout entier j de $[\![1, n]\!]$:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{j} a_i = \sup_{(x_1,\dots,x_j)\in\mathcal{R}_j} \sum_{i=1}^{j} \langle x_i, Ax_i\rangle.}$$

(où $\mathcal{R}_j$ est l'ensemble des familles orthonormales de cardinal j dans $\mathbb{R}^n$).

8e. Soit alors $(w_1, \dots, w_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres de C et, pour $j \in [\![1, n]\!]$, $\mathcal{R}_j = (w_1, \dots, w_j)$.
J'ai d'après ce qui précède :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{j} c_i = \sum_{i=1}^{j} \langle w_i, Cw_i\rangle = \sum_{i=1}^{j} \langle w_i, Aw_i\rangle + \sum_{i=1}^{j} \langle w_i, Bw_i\rangle \leq \sum_{i=1}^{j} a_i + \sum_{i=1}^{j} b_i.}$$

Troisième partie

9. Si $C = A + B$, $\mathrm{Tr}(C) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$ donc, avec les notations précédentes :

$$c_1 + c_2 = a_1 + a_2 + b_1 + b_2$$

Σ est inclus dans la droite d'équation $x + y = a_1 + a_2 + b_1 + b_2$. De plus, d'après la question **7b,** $c_{2+1-1} \leq a_2 + b_1$ et $c_2 \geq a_2 + b_2$. Les points de Σ sont donc d'ordonnée comprise entre $a_2 + b_2$ et $a_2 + b_1$. Notons H et K ces deux points extrêmes. Leurs abscisses sont $a_1 + b_1$ et $a_1 + b_2$. Le vecteur $\overrightarrow{HK}$ a pour coordonnées $(b_2 - b_1, b_1 - b_2)$ et $\left\|\overrightarrow{HK}\right\|^2 = 2(b_1 - b_2)^2$. En conclusion

$$\boxed{\Sigma \text{ est inclus dans le segment } [H, K] \text{ qui est de longueur } \sqrt{2}(b_1 - b_2).}$$

10a. Soit A une matrice fixée de $S(a_1, a_2)$, B une matrice quelconque de $S(b_1, b_2)$. A est diagonalisable. Il existe $P \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = P\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2\end{pmatrix}{}^tP$. Notons D la matrice diagonale d'éléments diagonaux a_1, a_2. $A + B$ est semblable à $B' = D + {}^tPBP$. J'ai $s^{\downarrow}(A + B) = s^{\downarrow}(D + B')$. L'application $B \mapsto {}^tPBP$ est une bijection de l'ensemble $S(b_1, b_2)$ dans lui-même. J'ai donc bien :

$$\boxed{\Sigma = \left\{ s^{\downarrow}(A + B) \mid A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2\end{pmatrix}, B \in S(b_1, b_2)\right\}.}$$

10b. Pour $B \in S(b_1, b_2)$, le théorème spectral fournit une base orthonormale de vecteurs propres, que je peux supposer directe (quitte à remplacer l'un des vecteurs par son opposé). Alors la matrice de passage est une matrice de rotation : je dispose de $\theta \in [-\pi, \pi]$ tel que

$$B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$$

L'application qui à θ associe la matrice ci-dessus est clairement continue et, par construction, son image est $S(b_1, b_2)$.

10c. Notons $B(\theta)$ la matrice précédente et $\Delta = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$. L'application $\theta \mapsto s^{\downarrow}(\Delta + B(\theta))$ est continue par composée de fonctions continues (cf. question **1d**). L'image de $[-\pi, \pi]$ est d'après la question précédente l'ensemble Σ. Les deux fonctions coordonnées sont également continues donc l'image de $[-\pi, \pi]$ par chacune de ces deux fonctions est un **segment** de $\mathbb{R}$. Il en résulte que Σ est un segment de $\mathbb{R}^2$. Ce segment est inclus dans $[H, K]$. Il reste à montrer que c'est $[H, K]$.
Prenons $\theta = 0$; $\Delta + B(0) = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & 0 \\ 0 & a_2 + b_2 \end{pmatrix}$. $s^{\downarrow}(\Delta + B(0)) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) = H$.
Avec $\theta = \pi/2$: $\Delta + B(\pi/2) = \begin{pmatrix} a_1 + b_2 & 0 \\ 0 & a_2 + b_1 \end{pmatrix}$. $s^{\downarrow}(\Delta + B(\pi/2)) = (a_1 + b_2 1, a_2 + b_1) = K$.
Le segment $\pm$ contient les deux points H et K, il contient donc le segment $[H, K]$.
Par double inclusion

$$\boxed{\Sigma = [H, K].}$$

* *
*