

Algèbre 2

2015 X-ENS PC

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Toute affirmation doit être clairement et complètement justifiée.

Dans ce problème, n est un entier positif. L'espace vectoriel réel \mathbb{R}^n est muni du produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne associée $\| \cdot \|$; on l'identifie à l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des vecteurs colonnes à n coordonnées.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'algèbre des matrices $n \times n$ à coefficients réels et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices réelles symétriques. On notera tM la matrice transposée de M et I_n la matrice identité. Par abus de notation on identifiera $\langle x, y \rangle$ au vecteur à une coordonnée txy .

Les coordonnées d'un n -uplet m de réels (considéré comme vecteur ligne) seront notées m_1, \dots, m_n .

Si m est un n -uplet de réels, m^\downarrow est le n -uplet obtenu à partir de m par permutation de ses coordonnées de sorte que $m_1^\downarrow \geq m_2^\downarrow \geq \dots \geq m_n^\downarrow$. Autrement dit il s'agit du n -uplet obtenu à partir de m en ordonnant dans l'ordre décroissant les coordonnées de m . Par exemple, si $m = (3, 2, -1, 6, 2, 9)$, alors $m^\downarrow = (9, 6, 3, 2, 2, -1)$.

L'ensemble des valeurs propres d'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sera appelé, comme à l'habitude, spectre de M . On notera s^\downarrow l'application de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R}^n qui à une matrice M symétrique associe le n -uplet (appelé *spectre ordonné*) dont les coordonnées sont les éléments ordonnés dans l'ordre décroissant du spectre de M (répétés autant de fois que leur ordre de multiplicité). Ainsi, par exemple, si le spectre de la matrice $M \in \mathcal{S}_4(\mathbb{R})$ vaut $\{-1, 3, 3, 7\}$, on a $s^\downarrow(M) = (7, 3, 3, -1)$. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose

$$\|M\| = \sup_{\|x\|=1} \|Mx\|.$$

On admet qu'il s'agit d'une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Première partie

1a. Rappeler pourquoi $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel réel et quelle est sa dimension. Pourquoi l'application s^\downarrow est-elle bien définie sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$?

1b. L'application s^\downarrow est-elle linéaire ? Justifier votre réponse.

1c. Si $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, exprimer $s^\downarrow(-M)$ en fonction des coordonnées (m_1, \dots, m_n) de $s^\downarrow(M)$.

1d. Soit $M = \begin{pmatrix} \lambda & h \\ h & \mu \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. Calculer $s^\downarrow(M)$.

2a. Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on note $m = s^\downarrow(M)$ son spectre ordonné. Montrer qu'il existe une base orthonormée (v_1, \dots, v_n) de \mathbb{R}^n telle que

$$M = \sum_{i=1}^n m_i v_i {}^t v_i.$$

Une telle décomposition de M sera appelée dans la suite *résolution spectrale* de M .

2b. Calculer

$$\sup_{\|x\|=1} \langle x, Mx \rangle$$

en fonction des coordonnées de m . Cette borne supérieure est-elle atteinte ? (On pourra décomposer x et Mx sur la base orthonormée (v_1, \dots, v_n) de la question **2a**).

2c. Les notations sont celles de la question **2a**. Soit j un entier, $1 \leq j \leq n$. On note \mathcal{V}_j le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n engendré par (v_1, \dots, v_j) . et \mathcal{W}_j celui engendré par $(v_j, v_{j+1}, \dots, v_n)$. Montrer les égalités

$$\inf_{x \in \mathcal{V}_j, \|x\|=1} \langle x, Mx \rangle = \sup_{x \in \mathcal{W}_j, \|x\|=1} \langle x, Mx \rangle = m_j$$

3a. Soient \mathcal{U} et \mathcal{V} deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n tels que $\dim(\mathcal{U}) + \dim(\mathcal{V}) > n$. Montrer que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ ne se réduit pas à $\{0\}$.

3b. Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on note $m = s^\perp(M)$. Soit j un entier, $1 \leq j \leq n$, et \mathcal{V} un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n de dimension j . Montrer que

$$\inf_{x \in \mathcal{V}, \|x\|=1} \langle x, Mx \rangle \leq m_j.$$

(On pourra utiliser les questions **2c** et **3a**, en choisissant $\mathcal{U} = \mathcal{W}_j$.)

3c. En reprenant les notations de la question **3b.**, en déduire que :

$$\sup_{\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n, \dim \mathcal{V}=j} \left(\inf_{x \in \mathcal{V}, \|x\|=1} \langle x, Mx \rangle \right) = m_j.$$

Cette borne supérieure est-elle atteinte ?

4. Soient m et l deux n -uplets de réels. On note

$$l \preccurlyeq m \quad \text{si et seulement si, pour tout entier } j, 1 \leq j \leq n, l_j \leq m_j.$$

4a. Soient $L, M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $(0, \dots, 0) \preccurlyeq s^\perp(M - L)$. Montrer que $s^\perp(L) \preccurlyeq s^\perp(M)$.

4b. Montrer que pour toute matrice $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $(0, \dots, 0) \preccurlyeq s^\perp(\|M\|I_n - M)$.

4c. Soit $L, M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on note $m = s^\perp(M)$ et $l = s^\perp(L)$. Montrer que

$$\max_{1 \leq j \leq n} |l_j - m_j| \leq \|L - M\|$$

4d. Conclure que la fonction $s^\perp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.

5. On note $\mathcal{S}_n^\dagger(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques $n \times n$ dont toutes les valeurs propres sont simples.

5a. Soit $M \in \mathcal{S}_n^\dagger(\mathbb{R})$. Déterminer un réel $r > 0$ tel que la boule ouverte de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ centrée en M et de rayon r soit incluse dans $\mathcal{S}_n^\dagger(\mathbb{R})$. En déduire que $\mathcal{S}_n^\dagger(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

5b. Montrer que la première composante s_1^\perp de s^\perp est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathcal{S}_2^\dagger(\mathbb{R})$ mais pas sur $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. (On pourra utiliser la question **1d.**)

Deuxième partie

Dans toute cette partie, on considère deux matrices symétriques réelles $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et leur somme $C = A + B$. On note $a = s^\perp(A)$, $b = s^\perp(B)$ et $c = s^\perp(C)$.

6a. Montrer que

$$\sum_{i=1}^n c_i = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i.$$

6b. Montrer que $a_1 + b_1 \geq c_1$.

6c. Montrer que $a_n + b_n \leq c_n$.

7a. Soient \mathcal{U}, \mathcal{V} et \mathcal{W} trois sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n tels que

$$\dim \mathcal{U} + \dim \mathcal{V} + \dim \mathcal{W} > 2n$$

Montrer que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ ne se réduit pas à $\{0\}$.

7b. En utilisant des résolutions spectrales de A , B et C , montrer que, si les entiers strictement positifs j et k vérifient $j + k \leq n + 1$, on a

$$c_{j+k-1} \leq a_j + b_k.$$

En déduire pour tout entier j , $1 \leq j \leq n$,

$$a_j + b_n \leq c_j.$$

8. On note a_{ii} pour $1 \leq i \leq n$ les éléments diagonaux de A .

8a. Démontrer que $a_{11} \leq a_1$.

8b. Soient j et k des entiers positifs tels que $1 \leq j < k$ et $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_k$ des réels. On définit $\mathcal{D}_{j,k} = \{(t_1, \dots, t_k) \in [0, 1]^k \mid t_1 + \dots + t_k = j\}$ et f la fonction de $\mathcal{D}_{j,k}$ dans \mathbb{R} définie par

$$f(t_1, \dots, t_k) = \sum_{i=1}^k s_i t_i.$$

Démontrer que pour tout $(t_1, \dots, t_k) \in \mathcal{D}_{j,k}$,

$$\sum_{i=1}^j s_i - f(t_1, \dots, t_k) \geq \sum_{i=1}^j (s_i - s_j)(1 - t_i).$$

En déduire que

$$\sup_{\mathcal{D}_{j,k}} f = \sum_{i=1}^j s_i.$$

8c. Montrer que, plus généralement qu'en **8a**, on a pour tout entier $1 \leq j \leq n$

$$\sum_{i=1}^j a_{ii} \leq \sum_{i=1}^j a_i.$$

8d. En déduire que pour tout entier $1 \leq j \leq n$

$$\sum_{i=1}^j a_i = \sup_{(x_1, \dots, x_j) \in \mathcal{R}_j} \sum_{i=1}^j \langle x_i, Ax_i \rangle,$$

où \mathcal{R}_j est l'ensemble des familles orthonormales de cardinal j dans \mathbb{R}^n .

8c. En conclure que l'on a pour tout entier $1 \leq j \leq n$

$$\sum_{i=1}^j c_i \leq \sum_{i=1}^j a_i + \sum_{i=1}^j b_i.$$

Troisième partie

Dans toute cette partie, on étudie le cas $n = 2$. Pour deux réels u et v tels que $u \geq v$, on note :

$$S(u, v) = \left\{ M \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \mid s^\downarrow(M) = (u, v) \right\}.$$

On fixe $a_1 \geq a_2$ et $b_1 \geq b_2$, quatre réels vérifiant la relation

$$a_1 - a_2 \geq b_1 - b_2.$$

On cherche à identifier l'ensemble

$$\Sigma = \left\{ s^\downarrow(A + B) \mid A \in S(a_1, a_2) \quad \text{et} \quad B \in S(b_1, b_2) \right\},$$

autrement dit l'ensemble des spectres possibles de somme de deux matrices symétriques réelles de spectres respectifs donnés.

9. Montrer que Σ est inclus dans un segment de droite L de longueur $\sqrt{2}(b_1 - b_2)$, et dont on précisera les extrémités. On pourra étudier d'abord le cas où A et B sont diagonales.

10a. Montrer que

$$\Sigma = \left\{ s^\downarrow(A + B) \mid A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, B \in S(b_1, b_2) \right\}.$$

10b. Déterminer une fonction continue définie sur $[-\pi, \pi]$ dont l'image vaut $S(b_1, b_2)$.

10c. Montrer que $\Sigma = L$.

* *

*