Problème A

Partie I

1) a) Soient u et v les endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ de matrices respectives B et N dans la base canonique. Je dois montrer que : $\operatorname{rg} v = \dim(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} v) + \operatorname{rg}(u \circ v)$. Pour cela, j'applique le théorème du rang à la restriction $\tilde{u}$ de u à $\operatorname{Im} v$: $\operatorname{rg} v$ est la dimension de l'espace de départ de $\tilde{u}$ par construction.

Par ailleurs : $\operatorname{Im} \tilde{u} = \{Z \in \mathbb{C}^n \ / \ \exists Y \in \operatorname{Im} v \quad Z = u(Y)\} = \operatorname{Im}(u \circ v)$.

Enfin : $\operatorname{Ker} \tilde{u} = \{X \in \operatorname{Im} v \ / \ u(X) = 0\} = \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} v$.

Le théorème du rang me donne alors : $\dim \operatorname{Ker} \tilde{u} = \operatorname{rg} v - \operatorname{rg} \tilde{u}$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\dim(\operatorname{Ker} B \cap \operatorname{Im} N) = \operatorname{rg} N - \operatorname{rg} BN.}$$

b) Soit $k \in \mathbb{N}$. J'applique le résultat du **a)** avec $B = A - \lambda I$ et $N = (A - \lambda I)^k$:

$$a_k - a_{k+1} = \dim\left[\operatorname{Ker}(A - \lambda I) \cap \operatorname{Im}(A - \lambda I)^k\right]$$

J'en déduis tout d'abord que la suite (a_k) est décroissante, puisque, pour tout k, $a_k - a_{k+1}$ est un entier naturel, donc positif ou nul ! En outre, la suite de sous-espaces $\left(\operatorname{Im}(A - \lambda I)^k\right)$ est décroissante (résultat classique, obtenu par exemple à partir de l'inclusion $\operatorname{Im} u \circ v \subset \operatorname{Im} u$, vraie quels que soient les endomorphismes u, v de $\mathbb{C}^n$) ; il en résulte que les sous-espaces $\operatorname{Ker}(A - \lambda I) \cap \operatorname{Im}(A - \lambda I)^k$, ainsi donc que leurs dimensions, forment une suite décroissante. Finalement, la suite $(a_k - a_{k+1})$ est également décroissante. De plus, la suite (a_k) est une suite décroissante d'entier naturels, elle est nécessairement stationnaire ! Et par conséquent la suite $(a_k - a_{k+1})$ est nulle à partir d'un certain rang. En résumé :

$$\boxed{\text{Les suites } (a_k) \text{ et } (a_k - a_{k+1}) \text{ sont décroissantes, } (a_k - a_{k+1}) \text{ est nulle à partir d'un certain rang.}}$$

c) Par hypothèse, $a_p = a_{p+1}$; d'après la question précédente, j'ai donc : $\forall k \geq p \quad a_k = a_p$.

En particulier, $a_{2p} = a_p$, d'où, grâce au **a)** : $\dim\left[\operatorname{Ker}(A - \lambda I)^p \cap \operatorname{Im}(A - \lambda I)^p\right] = a_p - a_{2p} = 0$.

Les sous-espaces $\operatorname{Ker}(A - \lambda I)^p$ et $\operatorname{Im}(A - \lambda I)^p$ sont donc en somme directe ; or, d'après le théorème du rang, la somme de leurs dimensions est n, ils sont donc supplémentaires :

$$\boxed{\mathbb{C}^n = \operatorname{Ker}(A - \lambda I)^p \oplus \operatorname{Im}(A - \lambda I)^p.}$$

d) Comme A commute avec $(A - \lambda I)^p$, $\operatorname{Ker}(A - \lambda I)^p$ et $\operatorname{Im}(A - \lambda I)^p$ sont stables par A ; A induit donc un endomorphisme de $\operatorname{Ker}(A - \lambda I)^p$. Cet endomorphisme admet au moins une valeur propre puisque nous travaillons avec $\mathbb{C}$ comme corps de base. De plus, par construction, il annule le polynôme $(X - \lambda)^p$; par conséquent λ est la seule valeur propre possible (une valeur propre est racine de tout polynôme annulateur) ; finalement :

$$\boxed{A \text{ induit un endomorphisme de } \operatorname{Ker}(A - \lambda I)^p \text{ admettant } \lambda \text{ pour unique valeur propre.}}$$

Par ailleurs, A induit également un endomorphisme de $\operatorname{Im}(A - \lambda I)^p$, et si $X \in \operatorname{Im}(A - \lambda I)^p$ vérifie $AX = \lambda X$, alors $X \in \operatorname{Ker}(A - \lambda I)$, donc $X \in \operatorname{Ker}(A - \lambda I)^p$, d'où $X = 0$ d'après **c)** :

$$\boxed{A \text{ induit un endomorphisme de } \operatorname{Im}(A - \lambda I)^p \text{ n'admettant pas } \lambda \text{ pour valeur propre.}}$$

Enfin, en choisissant une base adaptée à la décomposition obtenue au **c)**, je constate que A est semblable à une matrice diagonale par blocs, les deux blocs diagonaux étant les matrices des deux endomorphismes induits étudiés ci-dessus ; le polynôme caractéristique de A est alors le produit des polynômes caractéristiques de ces deux blocs ; or, d'après ce qui précède, étant scindé sur $\mathbb{C}$ avec λ pour seule racine, le premier est $(X - \lambda)^d$, où d est la dimension de $\operatorname{Ker}(A - \lambda I)^p$, tandis que le second n'admet pas λ pour racine ; d est donc la multiplicité de λ dans le polynôme caractéristique de A :

$$\boxed{\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I)^p = q.}$$

e) Si A admet λ pour unique valeur propre, celle-ci est de multiplicité n, donc, avec les notations précédentes, $\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I)^p = n$, soit $(A - \lambda I)^p = 0$:

$$\boxed{\text{Si } A \text{ admet } \lambda \text{ pour unique valeur propre, alors } A - \lambda I \text{ est nilpotente.}}$$

2) a) Soient $A=(a_{i,j})$, $B=(b_{j,k})$ et $AB=(c_{i,k})$; pour tout (i,k) de $\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_q$ j'ai

$$|c_{i,k}|=\left|\sum_{j=1}^{p}a_{i,j}b_{j,k}\right|\le\sum_{j=1}^{p}|a_{i,j}|\,|b_{j,k}|\le p\,\|A\|\,\|B\|$$

Donc :

$$\boxed{\|AB\|\le p\,\|A\|\,\|B\|}$$

b) Par hypothèse, la suite $(\|A_k-L\|)$ converge vers 0. Or d'après la question précédente

$$\forall k\in\mathbb{N}\quad \|A_kB-LB\|\le p\,\|A_k-L\|\,\|B\|$$

Il en résulte que la suite $(\|A_kB-LB\|)$ converge également vers 0, autrement dit :

$$\boxed{\text{La suite } (A_kB) \text{ converge vers } LB.}$$

J'obtiens de même que :

$$\boxed{\text{La suite } (TA_k) \text{ converge vers } TL.}$$

Partie II

1) Soit X un vecteur propre de A associé à λ : $\forall k\in\mathbb{N}\quad A^kX=\lambda^kX$.
X étant fixé et la suite (A^k) bornée par hypothèse, la suite (λ^kX) est bornée et donc la suite (λ^k) également (car X admet au moins une composante non nulle !). Par conséquent :

$$\boxed{|\lambda|\le 1.}$$

2) a) Soit $k\in\mathbb{N}$. La formule de Taylor dans $\mathbb{C}[x]$ appliquée en μ à x^k me donne la division euclidienne de x^k par $(x-\mu)^2$:

$$x^k=\mu^k+k\mu^{k-1}(x-\mu)+(x-\mu)^2\,Q(x)$$

où Q est un polynôme ; en substituant A à x, j'obtiens :

$$A^k=\mu^kI+k\mu^{k-1}(A-\mu I)+Q(A)\,(A-\mu I)^2$$

et en multipliant par X, compte tenu de l'hypothèse $X\in\operatorname{Ker}(A-\mu I)^2$:

$$\boxed{A^kX=\mu^kX+k\mu^{k-1}\,(A-\mu I)\,X.}$$

La suite (A^k) étant bornée et μ étant de module 1, la suite $(A^kX-\mu^kX)$ est bornée alors que $\left|k\mu^k\right|$ tend vers l'infini : nécessairement, le vecteur $(A-\mu I)\,X$ est nul, c'est-à-dire que

$$\boxed{X\in\operatorname{Ker}(A-\mu I).}$$

b) Je viens de prouver au **a)** l'inclusion $\operatorname{Ker}(A-\mu I)^2\subset\operatorname{Ker}(A-\mu I)$; l'autre inclusion étant banale, j'ai donc $\operatorname{Ker}(A-\mu I)^2=\operatorname{Ker}(A-\mu I)$; par conséquent, le **I)1)** s'applique avec $\lambda=\mu$ et $p=1$. J'en déduis :

$$\boxed{\dim\operatorname{Ker}(A-\mu I)=q.}$$

3) Je reprends les notations et les arguments du **1)**, avec ici la suite (A^k) qui converge : alors les suites (A^kX), (λ^kX) et (λ^k) convergent également. Je sais déjà que $|\lambda|\le 1$. Soit $|\lambda|<1$, soit $|\lambda|=1$. Dans ce dernier cas, je sais que la suite $\left(\lambda^k\right)$ converge vers un complexe ℓ qui est aussi de module 1, par continuité du module sur $\mathbb{C}$; mézalor la sous-suite $\left(\lambda^{k+1}\right)$ converge également vers ℓ, or pour tout k, $\lambda^{k+1}=\lambda.\lambda^k$, d'où, à la limite, $\ell=\lambda\ell$ et finalement $\lambda=1$ (ℓ est non nul car de module 1 !). En conclusion :

$$\boxed{|\lambda|<1 \text{ ou } \lambda=1.}$$

Si 1 est valeur propre de A, alors le **2)b)** s'applique :

$$\boxed{\text{Si 1 est valeur propre de } A\text{, son ordre de multiplicité est égal à } \dim\operatorname{Ker}(A-I).}$$

Partie III

1) Si A admet trois valeurs propres distinctes, A est diagonalisable et je suis dans le cas **a)** ; si A admet une unique valeur propre, je suis dans le cas **b)** ! Il me reste à examiner le cas où A admet deux valeurs propres : leurs multiplicités sont deux entiers naturels non nuls de somme 3, l'une vaut 1 et l'autre 2 ! Soit α la valeur propre simple et β la double. Le théorème de Cayley-Hamilton montre alors que $(A-\beta I)^2(A-\alpha I)=0$, c'est-à-dire que $\operatorname{Im}(A-\alpha I)\subset \operatorname{Ker}(A-\beta I)^2$. Or $\operatorname{Ker}(A-\alpha I)$ est une droite (sinon α serait de multiplicité au moins égale à 2). D'après le théorème du rang, $\mathcal{P}=\operatorname{Im}(A-\alpha I)$ est donc un plan. Alors $\operatorname{Ker}(A-\beta I)^2$ contient $\mathcal{P}$, mais n'est pas égal à $\mathbb{C}^3$ (car $(X-\beta)^2$ ne saurait être un polynôme annulateur de A, puisque la valeur propre α n'en est pas racine). Ainsi $\operatorname{Ker}(A-\beta I)^2=\mathcal{P}$. Enfin, la droite $\operatorname{Ker}(A-\alpha I)$ est un supplémentaire de ce plan : si $X\in\operatorname{Ker}(A-\alpha I)\cap\operatorname{Ker}(A-\beta I)^2$, alors $AX=\alpha X$ et donc $(A-\beta I)^2X=(\alpha-\beta)^2X=0$, d'où $X=0$ puisque $\alpha\neq\beta$. Finalement :

$$\boxed{\mathbb{C}^3=\operatorname{Ker}(A-\alpha I)\oplus\operatorname{Ker}(A-\beta I)^2.}$$

De plus, $\operatorname{Ker}(A-\beta I)^2$ contient le sous-espace propre $\operatorname{Ker}(A-\beta I)$ (classique) ; si $\mathcal{P}=\operatorname{Ker}(A-\beta I)$, alors A est diagonalisable et je suis dans le cas **a)** ; sinon, l'endomorphisme v de $\mathcal{P}$ induit par $A-\beta I$ vérifie $v\neq 0$ et $v^2=0$; je choisis alors $e_3\in\mathcal{P}\setminus\operatorname{Ker}(A-\beta I)$ et $e_2=v(e_3)$ et j'ai (classique !) :$\operatorname{Ker}(A-\beta I)^2$

$$(e_2,e_3)\ \text{base de } \mathcal{P}\quad\text{et}\quad\begin{cases}v(e_2)=0\\ v(e_3)=e_2\end{cases}\quad\text{soit}\quad\begin{cases}Ae_2=\beta.e_2\\ Ae_3=e_2+\beta.e_3\end{cases}$$

Il n'y a plus qu'à choisir e_1 non nul dans $\operatorname{Ker}(A-\alpha I)$ pour obtenir une base (e_1,e_2,e_3) où la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A est la matrice B de l'énoncé.

$$\boxed{\text{On est nécessairement dans l'un au moins des trois cas } \textbf{a), b), c)}.}$$

2) La formule du binôme s'applique classiquement :

$$\boxed{B^0=I\quad\text{et}\quad\forall k\in\mathbb{N}^*\quad B^k=\begin{pmatrix}\alpha^k&0&0\\0&\beta^k&k\beta^{k-1}\\0&0&\beta^k\end{pmatrix}.}$$

3) **a)** <u>*Si A est diagonalisable*</u> : alors A est semblable à une matrice diagonale $\Delta=\operatorname{diag}(\alpha,\beta,\gamma)$; par hypothèse, α,β,γ sont dans F : les suites (α^k), (β^k), (γ^k) et par conséquent la suite (Δ^k) convergent et il en est de même de la suite (A^k) (si $P^{-1}AP=\Delta$, alors pour tout k, $A^k=P\Delta^kP^{-1}$ et le **I.2)b)** s'applique).

b) <u>*Si A admet une unique valeur propre α*</u> : soit $\alpha=1$, auquel cas $\dim\operatorname{Ker}(A-I)=3$ d'après l'hypothèse ; alors $A=I$ et la suite (A^k) converge ! Soit $|\alpha|<1$ et $N=A-\alpha I$ est nilpotente d'après **I)1)e)** ; soit donc p tel que $N^p=0$. N et I commutent, je peux donc appliquer la formule du binôme :

$$\forall k\geq p\quad A^k=(\alpha I+N)^k=\sum_{j=0}^{p-1}\binom{k}{j}\alpha^{k-j}N^j$$

Chacun des p termes de cette somme tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini, car $|\alpha|<1$, donc la suite géométrique de raison $|\alpha|$ qui converge vers 0 "l'emportera" sur $\binom{k}{j}$, qui est polynomial en k.

Finalement dans ce cas (A^k) converge également.

c) <u>*Si A est semblable à B*</u> (avec B comme à la question précédente) : pour les mêmes raisons que ci-dessus, il me suffit de prouver que la suite (B^k) converge. α et β sont dans F ; s'ils sont tous deux de module strictement inférieur à 1, alors (B^k) converge vers 0, d'après son expression vue au **2)** et en utilisant à nouveau la comparaison entre puissances et exponentielles**.**

Si $\alpha=1$, alors $|\beta|<1$ et (B^k) converge de même vers $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

Enfin le cas $\beta=1$ est exclu ici, car j'aurais alors $|\alpha|<1$ et par hypothèse $\operatorname{Ker}(A-I)$ de dimension 2 ce qui contredirait le fait que $\operatorname{rg}(A-I)=\operatorname{rg}(B-I)=2$ (compte tenu du théorème du rang !).

En conclusion, dans ces trois cas, qui recouvrent toutes les possibilités, d'après **1)** :

$$\boxed{\text{La suite } (A^k) \text{ est convergente.}}$$

Problème B

Partie I – Préambule

1) D'après le théorème de Pythagore, a et c définissent un TRPI si et seulement si

$$a^2 + (a+1)^2 = c^2$$

d'où immédiatement :

$$\boxed{a \text{ et } c \text{ définissent un TRPI si et seulement s'ils vérifient } (R1).}$$

2) Partant de $a = a_0$, j'incrémente la valeur de a jusqu'à ce que $\sqrt{a^2 + (a+1)^2}$ soit entier (il faut faire ici confiance à l'énoncé qui promet que l'on finira par sortir de la boucle !). Voici une fonction Python, recevant comme paramètre n et renvoyant la liste des $[a_k, c_k]$, $0 \leq k \leq n$.

```
from math import sqrt

def TRPI(n):
    a=-1
    k=0
    sortie=[]
    while k<=n:
        a+=1
        x=2*a*(a+1)+1
        c=int(sqrt(x))
        if c**2==x:
            sortie.append([a,c])
            k+=1
    return sortie
```

Bien penser à incrémenter `a` à chaque passage dans la boucle `while`, mais `k` uniquement lorsqu'on découvre un nouveau TRPI !

3) Le programme ci-dessus fournit en effet :

$$\boxed{a_2 = 20 \ ; \ c_2 = 29 \ ; \ a_3 = 119 \ ; \ c_3 = 169.}$$

Les valeurs suivantes sont : $a_4 = 696$; $c_4 = 985$; $a_5 = 4\ 059$; $c_5 = 5\ 741$; $a_6 = 23\ 660$; $c_6 = 33\ 461$!

Partie II – Les suites

1) β et λ sont déterminés par les deux relations : $\begin{cases} c_2 + \beta c_1 + \lambda c_0 & = 0 \\ c_3 + \beta c_2 + \lambda c_1 & = 0 \end{cases}$. J'obtiens l'unique solution par résolution de ce système de Cramer :

$$\boxed{\beta = -6 \ ; \ \lambda = 1 \ .}$$

J'ai donc, pour tout $n \geq 1$, $v_{n+1} = 6v_n - v_{n-1}$ et $v_{n+1} - v_n = 4v_n + (v_n - v_{n-1})$.
La propriété $\mathcal{P}_n$: "$v_n \in \mathbb{N}$ et $v_{n+1} - v_n \geq 0$ ", pour tout $n \in \mathbb{N}$, se montre alors aisément par récurrence forte sur n. En particulier,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n \in \mathbb{N}.}$$

L'équation caractéristique associée à la relation de récurrence linéaire double $v_{n+1} - 6v_n + v_{n-1} = 0$ est $r^2 - 6r + 1 = 0$; elle admet deux solutions distinctes, $p = 3 + 2\sqrt{2}$ et $q = 3 - 2\sqrt{2}$, v_n est donc de la forme $A \cdot p^n + B \cdot q^n$, les constantes A et B étant déterminées par :

$$A + B = v_0 = 1 \ ; \ A \cdot p + B \cdot q = v_1 = 5 \ .$$

Tous calculs faits,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\left(\sqrt{2} + 1\right) p^n + \left(\sqrt{2} - 1\right) q^n \right] \ .}$$

2) Effectivement :

$$\boxed{a_2 - 6a_1 + a_0 = a_3 - 6a_2 + a_1 = 2 \text{ , donc } b = 2 \text{ convient.}}$$

Alors, pour tout $n \geq 1$,

$$u_{n+1} = 6u_n - u_{n-1} + 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} - u_n = 4u_n + (u_n - u_{n-1}) + 2.$$

J'en déduis comme au **1)** que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in \mathbb{N}.}$$

Il apparaît que la suite (w_n) vérifie la même relation de récurrence homogène que (v_n), donc w_n est également de la forme $A \cdot p^n + B \cdot q^n$ d'où, tous calculs faits,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = \frac{1}{4}\left[\left(\sqrt{2}+1\right)p^n - \left(\sqrt{2}-1\right)q^n\right] \text{ et } u_n = w_n - \frac{1}{2}.}$$

3) Comme $u_n = w_n - \dfrac{1}{2}$ et $u_n + 1 = w_n + \dfrac{1}{2}$, j'ai pour tout n :

$$u_n^2 + (u_n+1)^2 = 2w_n^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{8}\left(\left[\left(\sqrt{2}+1\right)p^n - \left(\sqrt{2}-1\right)q^n\right]^2 + 4\right) = v_n^2$$

car

$$\left(\sqrt{2}+1\right)p^n \times \left(\sqrt{2}-1\right)q^n = 1 \text{ (en effet } pq = 1).$$

Par conséquent,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n^2 + (u_n+1)^2 = v_n^2 \text{ , ce qu'il fallait démontrer.}}$$

Partie III – L'algèbre linéaire

1) Je pose, pour tout n, $U_n = 3u_n + 2v_n + 1$ et je calcule pour $n \geq 1$:

$$U_{n+1} = 3u_{n+1} + 2v_{n+1} + 1 = 3\left(6u_n - u_{n-1} + 2\right) + 2\left(6v_n - v_{n-1}\right) + 1 = 6U_n - U_{n-1} + 2.$$

Ainsi (U_n) vérifie la même relation de récurrence que (u_n) ; or

$$U_0 = 3 = u_1 \quad \text{et} \quad U_1 = 20 = u_2$$

d'où, par une récurrence immédiate,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = U_n = 3u_n + 2v_n + 1.$$

La même méthode permet de prouver l'autre relation :

$$\boxed{(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ vérifient le système } (S).}$$

Il suffit d'écrire :

$$\begin{pmatrix} 3u_n + 2v_n + 1 \\ 4u_n + 3v_n + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

pour constater que

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ conviennent.}}$$

2) **a)** Il vient : $\det(A-I) = -4$ et $\mathrm{Com}\,(A-I) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ d'où :

$$\boxed{A - I \text{ est inversible et } (A-I)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}.}$$

b) En constatant l'hécatombe :

$$\boxed{(A-I)\,S_n = A^n - I \quad \text{d'où} \quad S_n = (A-I)^{-1}(A^n - I).}$$

c) $X_1 = AX_0 + B$, $X_2 = AX_1 + B = A^2X_0 + (A+I)\,B\ldots$ d'où une conjecture et une récurrence assez banales :

$$\boxed{X_n = A^nX_0 + S_nB.}$$

(N.B. : on peut étudier directement cette suite "arithmético-géométrique" en trouvant Ω telle que $\Omega = A\Omega + B$ et en remarquant que la suite $(X_n - \Omega)$ est "géométrique".)

3) a) Le polynôme caractéristique de A n'est autre que $X^2 - 6X + 1$; ainsi A, matrice carrée d'ordre 2 admet deux valeurs propres distinctes (p et q), donc A est diagonalisable (et ses sous-espaces propres sont deux droites) avec, tous calculs faits,

$$\boxed{P^{-1}AP = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.}$$

Il vient alors

$$\boxed{A^n = P \begin{pmatrix} p^n & 0 \\ 0 & q^n \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p^n + q^n & \frac{1}{\sqrt{2}}(p^n - q^n) \\ \sqrt{2}\,(p^n - q^n) & p^n + q^n \end{pmatrix}.}$$

b) D'où

$$S_n B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(p^n + q^n) - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}}(p^n - q^n) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^n X_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}}(p^n - q^n) \\ \frac{1}{2}(p^n + q^n) \end{pmatrix}$$

et enfin

$$\boxed{X_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\left[\left(\sqrt{2}+1\right)p^n - \left(\sqrt{2}-1\right)q^n\right] - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(\sqrt{2}+1\right)p^n + \left(\sqrt{2}-1\right)q^n\right] \end{pmatrix}. \text{ On retrouve bien } u_n \text{ et } v_n \text{ !!}}$$