Algèbre 1

Problème A

Notations

- On notera n, p, q des entiers naturels strictement positifs.
- On désigne par $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients complexes. Quand $n = p$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cet espace vectoriel et I la matrice identité.
- On identifie $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ à $\mathbb{C}^n$, c'est-à-dire que toute matrice colonne pourra être considérée comme un élément de $\mathbb{C}^n$ et vice-versa.
- Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, on note $\|A\| = \max\limits_{i,j} |a_{i,j}|$; on admettra qu'on définit ainsi une norme sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$.
- Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, on identifiera dans certaines questions la matrice A à l'application de $\mathbb{C}^p$ dans $\mathbb{C}^n$ définie par $X \mapsto AX$. On note $\operatorname{Ker} A$, $\operatorname{Im} A$ et $\operatorname{rg} A$ le noyau, l'image et le rang de A.

Les deux questions de la première partie sont indépendantes entre elles.
Elles seront utilisées dans la suite du problème.

Partie I

1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, λ une valeur propre de A de multiplicité q.
On considère la suite $(a_k)_{k\geq 1}$ définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad a_k = \operatorname{rg}(A - \lambda.I)^k.$$

a) Soient B et N deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; montrer que :

$$\dim(\operatorname{Ker} B \cap \operatorname{Im} N) = \operatorname{rg} N - \operatorname{rg}(BN).$$

b) Montrer que la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante, que la suite $(a_k - a_{k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ est également décroissante et nulle à partir d'un certain rang.

c) Soit alors $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_p = a_{p+1}$. Montrer que :

$$\mathbb{C}^n = \operatorname{Ker}(A - \lambda.I)^p \oplus \operatorname{Im}(A - \lambda.I)^p.$$

d) Montrer que A induit d'une part un endomorphisme de $\operatorname{Ker}(A-\lambda.I)^p$ admettant λ pour unique valeur propre, d'autre part un endomorphisme de $\operatorname{Im}(A - \lambda.I)^p$ n'admettant pas λ pour valeur propre ; en déduire que : $\dim[\operatorname{Ker}(A - \lambda.I)^p] = q$.

e) Que peut-on en conclure si A n'a qu'une unique valeur propre ?

2) **a)** Pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$, montrer que : $\|AB\| \leq p \cdot \|A\| \cdot \|B\|$.

b) Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ convergeant vers une matrice L.
Soient $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ et $T \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{C})$.
Montrer que les suites $(A_kB)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(TA_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergent ; préciser leurs limites.

Partie II

Dans cette partie on prend $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on suppose la suite $\left(\|A^k\|\right)_{k\in\mathbb{N}}$ bornée.

1) Soit λ une valeur propre de A ; montrer que $|\lambda| \leq 1$.

2) Soit $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $|\mu| = 1$. On suppose que μ est valeur propre de A d'ordre de multiplicité q.

a) Soit $X \in \operatorname{Ker}(A - \mu.I)^2$. Calculer A^kX, pour $k \in \mathbb{N}$, et en déduire que $X \in \operatorname{Ker}(A - \mu.I)$.

b) En déduire que : $\dim \operatorname{Ker}(A - \mu.I) = q$.

3) Dans cette question, on suppose que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente.

On suppose que λ est valeur propre de A. Montrer que la suite $\left(\lambda^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge et en déduire que : $|\lambda|<1$ ou $\lambda=1$.
Si 1 est valeur propre de A, comparer son ordre de multiplicité avec la dimension de l'espace propre correspondant.

Partie III

Dans cette partie, A est une matrice appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

1) Montrer qu'on est nécessairement dans l'un au moins des trois cas suivants :

a) A est diagonalisable.

b) A n'a qu'une valeur propre.

c) Il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$ avec $\alpha\neq\beta$ tel que A soit semblable à $\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & \beta & 1\\ 0 & 0 & \beta\end{pmatrix}$.

(On pourra montrer dans ce dernier cas que $\mathbb{C}^3=\operatorname{Ker}(A-\alpha I)\oplus\operatorname{Ker}(A-\beta I)^2$*.)*

2) Soit $B=\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & \beta & 1\\ 0 & 0 & \beta\end{pmatrix}$ avec $\alpha\neq\beta$; calculer B^k, pour $k\in\mathbb{N}$.

3) Soit $F=\{z\in\mathbb{C}\ /\ |z|<1\}\cup\{1\}$. On suppose que les valeurs propres de A sont dans F et que, si 1 est valeur propre de A d'ordre de multiplicité q, alors $\dim\operatorname{Ker}(A-I)=q$.
Montrer que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Problème B

L'usage de la calculatrice est autorisé, mais seuls les résultats obtenus par un calcul détaillé sur la copie seront rétribués.

Partie I – Préambule

Dans tout le problème, on appelle triangle rectangle pseudo-isocèle (en abrégé TRPI) tout triangle rectangle dont les côtés ont pour longueur des entiers strictement positifs de la forme a, $a+1$, c (c est la longueur de l'hypoténuse).

On admet qu'il existe une infinité de TRPI (ce résultat sera démontré au **II.3)**) et on les classe dans l'ordre croissant des valeurs de a.
Ainsi, le triangle de côtés $a=3$, $a+1=4$, $c=5$ est le plus petit TRPI.

1) Si a et c sont des entiers naturels non nuls, montrer qu'ils définissent un TRPI si et seulement s'ils vérifient la relation

$$(R1)\quad 2a^2-c^2+2a+1=0.$$

On note a_n et c_n les longueurs du petit côté et de l'hypoténuse du n^{e} TRPI et on définit ainsi deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec $a_1=3$ et $c_1=5$.

Comme $a=0$ et $c=1$ vérifient la relation $(R1)$, on pose $a_0=0$ et $c_0=1$. Les termes a_n et c_n sont alors définis pour tout $n\in\mathbb{N}$.

2) Écrire un programme en Python permettant de déterminer les valeurs successives de a_n et c_n.

3) Déterminer les valeurs de a_n et c_n pour $n=2$ et pour $n=3$.
(On vérifiera que $a_2=20$, $c_2=29$, $a_3=119$, $c_3=169$*.)*

Partie II – Les suites

1) Montrer que les termes de la suite (c_n) vérifient une relation de la forme :

$$(R2) \quad c_{n+1} + \beta c_n + \lambda c_{n-1} = 0$$

pour $n = 1$ et $n = 2$, où β et λ sont deux réels indépendants de n, que l'on précisera.

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$v_0 = c_0 \ , \quad v_1 = c_1 \quad \text{et, pour } n \geq 1, \quad v_{n+1} + \beta v_n + \lambda v_{n-1} = 0$$

(où β et λ sont les valeurs calculées ci-dessus).

Montrer que, pour tout n, $v_n \in \mathbb{N}$.

Déterminer v_n en fonction de n. On posera :

$$p = 3 + 2\sqrt{2} \quad \text{et} \quad q = 3 - 2\sqrt{2}.$$

2) Montrer que les termes de la suite (a_n) vérifient une relation de la forme :

$$(R3) \quad a_{n+1} + \beta a_n + \lambda a_{n-1} = b$$

pour $n = 1$ et $n = 2$, où β et λ sont les coefficients calculés en **II.1)** et où b est à déterminer.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = a_0 \ , \quad u_1 = a_1 \quad \text{et, pour } n \geq 1, \quad u_{n+1} + \beta u_n + \lambda u_{n-1} = b.$$

Montrer que, pour tout n, $u_n \in \mathbb{N}$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n + \dfrac{1}{2}$.

Déterminer w_n, puis u_n en fonction de n.

Dans toute la suite du problème, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont celles définies dans les questions **II.1)** et **II.2)**.

3) Montrer que pour tout $n \geq 1$, u_n et v_n sont les longueurs du petit côté et de l'hypoténuse d'un TRPI.

Partie III – L'algèbre linéaire

1) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient le système :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{rl} u_{n+1} = & 3u_n + 2v_n + 1 \\ v_{n+1} = & 4u_n + 3v_n + 2 \end{array} \right. .$$

En notant, pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, écrire le système (S) sous forme matricielle :

$$X_{n+1} = AX_n + B \quad \text{où} \quad A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ , \ B \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$$

en précisant A et B.

2) a) Montrer que $A - I$ est inversible, où I désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Calculer $(A - I)^{-1}$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, on pose $S_n = I + A + \cdots + A^{n-1}$. Calculer $(A - I)\, S_n$.

En déduire S_n en fonction de $(A - I)$, I et A^n.

c) Exprimer X_n en fonction de A^n, S_n, B et X_0.

3) a) Montrer que la matrice A est diagonalisable. Diagonaliser A. En déduire A^n. On posera :

$$p = 3 + 2\sqrt{2} \quad \text{et} \quad q = 3 - 2\sqrt{2}.$$

b) Calculer X_n en fonction de n. Retrouver les expressions de u_n et v_n déterminées en **II**.