# Partie I – Étude d'un cas simple

**Q1.** $Y$ est le rang du premier succès dans une suite d'expériences de Bernoulli **indépendantes** : cette variable aléatoire suit donc la loi géométrique de paramètre $q$ (la probabilité de générer $C$). Ainsi

$$\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{G}(q) \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(Y=n) = p^{n-1}q \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.}$$

**Q2.** La série génératrice de $Y$ est donc $\sum_{n\geq 1} \frac{q}{p}(pt)^n$, série géométrique de raison $pt$, donc de rayon de convergence $R_Y = 1/p$. Et, pour $|t| < 1/p$, la somme de cette série vaut

$$G_Y(t) = \frac{q}{p} \cdot \sum_{n=1}^{\infty}(pt)^n = \frac{q}{p} \cdot \frac{pt}{1-pt}.$$

En conclusion, puisque $p \in ]0,1[$,

$$\boxed{R_Y = \frac{1}{p} > 1 \quad \text{et} \quad G_Y(t) = \frac{qt}{1-pt} \text{ pour tout } t \in \left]-\frac{1}{p}, \frac{1}{p}\right[.}$$

**Q3.** En tant que somme de série entière, $G_Y$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R_Y, R_Y[$, les dérivées se calculant en dérivant terme à terme. Comme $R_Y > 1$, $G_Y$ est deux fois dérivable en 1. Il en résulte que $Y$ admet une espérance et une variance, avec

$$\mathbf{E}(Y) = G'_Y(1) \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(Y) = G''_Y(1) + G'_Y(1) - \left[G'_Y(1)\right]^2.$$

Or pour tout $t \in ]-1/p, 1/p[$,

$$G'_Y(t) = \frac{q}{(1-pt)^2} \quad \text{et} \quad G''_Y(t) = \frac{2pq}{(1-pt)^3}$$

et, comme $2p+q-1 = p$, je retrouve les formules connues

$$\boxed{\mathbf{E}(Y) = \frac{1}{q} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(Y) = \frac{p}{q^2}.}$$

# Partie II – Séries entières

**Q4.** Pour $z$ fixé dans $\mathbb{C}$, $\sum u_n(a)z^n$ est une série géométrique de raison $z/a$, donc convergente si et seulement si $|z| < |a|$ ; ainsi,

$$\boxed{\sum u_n(a)z^n \text{ est une série entière de rayon de convergence } |a|.}$$

**Q5.** Pour $|z| < |a|$, j'obtiens :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(a)z^n = -\frac{1}{a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (z/a)^n = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1-z/a}$$

soit

$$\boxed{\text{Pour } |z| < |a|, \sum_{n=0}^{\infty} u_n(a)z^n = \frac{1}{z-a}.}$$

**Q6.** Soit $n \in \mathbb{N}$ ; par définition de $v_n$ et par la formule donnant la somme de termes consécutifs d'une suite génométrique de raison différente de 1 ($a \neq b$ puisque $|a| < |b|$) :

$$v_n = \sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{a^{k+1}}\right)\left(-\frac{1}{b^{n-k+1}}\right) = \frac{1}{ab^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{b}{a}\right)^k = \frac{1}{ab^{n+1}} \cdot \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1} - 1}{\frac{b}{a} - 1}$$

d'où en distribuant

$$\boxed{v_n = \frac{1}{b-a} \cdot \left(\frac{1}{a^{n+1}} - \frac{1}{b^{n+1}}\right).}$$

**Q7.** Comme $|1/b| < |1/a|$ par hypothèse, il en résulte que $v_n \sim \dfrac{1}{b-a} \cdot \dfrac{1}{a^{n+1}}$ et donc que le rayon de convergence de $\sum v_n z^n$ est le même que celui de $\sum \dfrac{z^n}{a^n}$, soit $|a|$. Alors, pour $|z| < |a|$, les deux séries $\sum u_n(a)z^n$ et $\sum u_n(b)z^n$ sont absolument convergentes et le produit de Cauchy montre alors, grâce à **Q5**, que

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n = \frac{1}{(z-a)(z-b)}.}$$

**Q8.** D'après le résultat précédent et la définition de $f$, j'ai, pour $|t| < |a|$, $f(t) = \lambda t^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} v_n t^n$ et, pour $t$ non nul, cette série est de même nature que $\sum_{n=0}^{\infty} v_n t^n$ (puisque les termes généraux sont les mêmes à un coefficient multiplicatif non nul près !). Donc

$$\boxed{f \text{ est développable en série entière en 0 avec pour rayon de convergence } R_f = |a|.}$$

**Q9.** Je note que $g(t) = f(t) \cdot \dfrac{1}{t-c}$, bien défini pour $|t| < |a|$ puisque $|a| \leq |c|$ et à nouveau développable en série entière dans le disque ouvert de rayon $|a|$ grâce à un produit de Cauchy. Par conséquent,

$$\boxed{g \text{ est développable en série entière en 0, avec pour rayon de convergence } R_g \geq |a|.}$$

# Partie III – Étude d'un cas intermédiaire

**Q10.** Bien entendu, $p_1 = 0$. Ensuite, $p_2 = \mathbf{P}(C_1 \cap C_2) = \mathbf{P}(C_1)\mathbf{P}(C_2)$ (par indépendance) donc $p_2 = q^2$. Enfin, la seule possibilité pour avoir $Z = 3$ est que les trois premières lettres soient $PCC$ donc, toujours par indépendance : $p_3 = \mathbf{P}(P_1 \cap C_2 \cap C_3) = \mathbf{P}(P_1)\mathbf{P}(C_2)\mathbf{P}(C_3) = pq^2$. En conclusion

$$\boxed{p_1 = 0,\ p_2 = q^2 \text{ et } p_3 = pq^2.}$$

Notons que $p_0$ est nul également, puisque $Z$ est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ !

**Q11.** Fixons $n \geq 3$. Je note que $(P_1, C_1 \cap P_2, C_1 \cap C_2)$ est un système complet d'événements : ils sont incompatibles 2 à 2 car $P_1$, $C_1$ d'une part et $P_2$, $C_2$ d'autre part sont incompatibles ; de plus leur union est bien l'univers tout entier puisque $(C_1 \cap P_2) \cup (C_1 \cap C_2) = C_1 = \overline{P_1}$.

La formule des probabilités totales me donne alors :

$$p_n = \mathbf{P}(Z = n) = \mathbf{P}(P_1)\mathbf{P}_{P_1}(Z = n) + \mathbf{P}(C_1 \cap P_2)\mathbf{P}_{C_1 \cap P_2}(Z = n) + \mathbf{P}(C_1 \cap C_2)\mathbf{P}_{C_1 \cap C_2}(Z = n)$$

Si la première lettre est $P$, alors l'automate est dans l'état zéro, donc la probabilité pour que $n-1$ lettres plus tard il soit dans l'état 2 vaut $\mathbf{P}(Z = n-1)$ (processus sans mémoire) ; autrement dit

$$\mathbf{P}_{P_1}(Z = n) = \mathbf{P}(Z = n-1) = p_{n-1}.$$

De même, $\mathbf{P}_{C_1 \cap P_2}(Z = n) = \mathbf{P}(Z = n-2)$ (si après 2 lettres on est dans l'état 0, la probabilité de se retrouver dans l'état 2 après les $n-2$ lettres suivantes est $\mathbf{P}(Z = n-2) = p_{n-2}$). Enfin, si les deux premières lettres sont $CC$, alors $Z = 2$ donc $Z \neq n$ (puisque $n \geq 3$ !) : $\mathbf{P}_{C_1 \cap C_2}(Z = n) = 0$.

De plus, $\mathbf{P}(P_1) = p$ et, par indépendance, $\mathbf{P}(C_1 \cap P_2) = \mathbf{P}(C_1)\mathbf{P}(P_2) = pq$. Ainsi :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \geq 3,\ p_n = p\, p_{n-1} + pq\, p_{n-2}.}$$

**Q12.** Fixons $t \in [-1, 1]$. Pour tout $n \geq 3$, je multiplie la relation précédente par $t^n$ et je somme membre à membre les égalités obtenues, pour $n$ allant de 3 à l'infini (toutes les séries considérées sont absolument convergentes puisque $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$), ce qui donne (en faisant attention aux premiers termes et compte tenu de $p_0 = p_1 = 0$ !)

$$G_Z(t) - p_2 t^2 = p\, t G_Z(t) + pq\, t^2 G_Z(t).$$

Ainsi

$$\boxed{\text{Pour tout } t \in [-1, 1],\ \left(1 - pt - pqt^2\right) G_Z(t) = q^2 t^2.}$$

**Q13.** Comme $-pq \neq 0$, le polynôme $Q = 1 - pX - pqX^2$ est de degré 2 et $\Delta$ est son discriminant ; comme $\Delta > 0$, $a$ et $b$ sont les deux racines distinctes de $Q$ ; on peut donc le factoriser sous la forme indiquée : $Q = -pq(X-a)(X-b)$. Ainsi :

$$\boxed{\text{Pour tout } t \in \mathbb{R},\ Q(t) = -pq(t-a)(t-b).}$$

**Q14.** Comme $-pq < 0$, l'application $Q$ vérifie $Q(t) \underset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow} -\infty$, de plus

$$Q(-1) = 1 + p - pq = 1 + p^2 > 0 \quad \text{et} \quad Q(1) = 1 - p - pq = q^2 > 0.$$

Comme $Q$ est continue et que $a > b$ par définition, le théorème des valeurs intermédiaires nous assure que $b < -1$ et $a > 1$. Comme enfin $|a| - |b| = a + b < 0$, j'ai bien

$$\boxed{1 < |a| < |b|.}$$

**Q15.** D'après les questions précédentes, en posant $\lambda = -q/p$, j'ai $f(t) = \dfrac{\lambda t^2}{(t-a)(t-b)}$ et la question **Q8** s'applique (puisque $|a| < |b|$ d'après **Q14**) : $f$ est développable en série entière, avec pour rayon de convergence $|a|$. Or d'après **Q12**, $G_Z$ coïncide avec $f$ sur $[-1, 1]$ donc, par unicité des coefficients d'une série entière, ceux de $G_Z$ sont les mêmes que ceux du développement de $f$ ! Comme le rayon de convergence est entièrement déterminé par la suite des coefficients, le rayon de convergence de $G_Z$ est aussi égal à $|a|$ et

$$\boxed{f \text{ est développable en série entière au voisinage de 0, la série entière associée est } G_Z \text{ et } R_Z = |a|.}$$

**Q16.** Comme $R_Z > 1$ (cf. **Q15** et **Q14**), $G_Z$ est deux fois dérivable en 1 et donc

$$\boxed{Z \text{ admet une espérance et une variance.}}$$

De plus nous savons que

$$\mathbf{E}(Z) = G'_Z(1) = \frac{2q^4 - q^2(-p - 2pq)}{q^4} = \frac{2q^2 + (1-q)(1+2q)}{q^2}$$

ce qui donne bien

$$\boxed{\mathbf{E}(Z) = \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2}.}$$

**Q17.** J'ai d'après **Q3** et **Q16**

$$\mathbf{E}(Z) - \mathbf{E}(Y) = \frac{1}{q^2} \geq 1 \quad \text{car} \quad q^2 \leq 1.$$

Autrement dit

$$\boxed{\mathbf{E}(Z) \geq \mathbf{E}(Y) + 1.}$$

**Q18.** La première occurrence de $CC$ est évidemment **strictement** précédée par la première occurrence de $C$, donc on a toujours $Z \geq Y + 1$. Par croissance de l'espérance, on en déduit : $\mathbf{E}(Z) \geq \mathbf{E}(Y) + 1$.

$$\boxed{\text{Le résultat était prévisible !}}$$

# Partie IV – Algèbre linéaire

**Q19.** La 4$^{\text{e}}$ colonne de $A$ est nulle, ce qui signifie que

$$\boxed{0 \in \operatorname{Sp} A \text{ et le 4}^{\text{e}} \text{ vecteur de la base canonique est un vecteur propre associé.}}$$

**Q20.** Fixons $t \in \mathbb{R}$. Je développe deux fois par rapport à la dernière colonne :

$$\chi_A(t) = t \begin{vmatrix} t-p & 0 & -p \\ -q & t-q & 0 \\ 0 & -p & t \end{vmatrix} = t\left(-p\begin{vmatrix} -q & t-q \\ 0 & -p \end{vmatrix} + t\begin{vmatrix} t-p & 0 \\ -q & t-q \end{vmatrix}\right) = t\left(-p^2q + t(t-p)(t-q)\right)$$

or $p + q = 1$ d'où

$$\boxed{\chi_A(t) = t^4 - t^3 + pqt^2 - p^2qt.}$$

**Q21.** Pour $t \in \mathbb{R}^*$, comme $(-1)^4 = 1$ j'ai
$$\psi_A(t) = \det\left(t\left(\frac{1}{t}I_4 - A\right)\right) = t^4\chi_A\left(\frac{1}{t}\right),$$
soit, en vérifiant que l'égalité est encore vraie pour $t = 0$,
$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad \psi_A(t) = -p^2qt^3 + pqt^2 - t + 1.}$$

**Q22.** Comme $\psi_A(0) = 1$ et que $\psi_A$ est continue, il existe un voisinage de 0 sur lequel $\psi_A$ ne s'annule pas. Pour $t$ dans un tel voisinage, $I_4 - tA$ est donc inversible, or l'équation $(E_t)$ s'écrit $(I_4 - tA)\,S = L$ ; elle admet donc une unique solution dès que $I_4 - tA$ est inversible. En conclusion
$$\boxed{\text{Pour } t \text{ au voisinage de 0, } (E_t) \text{ admet une unique solution } S.}$$

**Q23.** Par hypothèse, $(I_4 - tA)\,S = L$ ; or la définition du produit matriciel fait que $(I_4 - tA)\,S$ n'est autre que la combinaison linéaire $S_0U_1 + S_1U_2 + S_2U_3 + S_3U_4$ des vecteurs colonnes de la matrice carrée $I_4 - tA$. Ainsi
$$\boxed{L = S_0U_1 + S_1U_2 + S_2U_3 + S_3U_4.}$$

**Q24.** La multilinéarité du déterminant dans la base $\mathcal{B}$, accompagnée du fait qu'un déterminant est nul dès que la famille comporte deux vecteurs identiques, permet d'écrire, compte tenu du résultat précédent,
$$\det_{\mathcal{B}}(U_1, U_2, U_3, L) = S_3 \det_{\mathcal{B}}(U_1, U_2, U_3, U_4).$$
Or ce dernier déterminant n'est autre que celui de $I_4 - tA$ ! Finalement,
$$\boxed{\det_{\mathcal{B}}(U_1, U_2, U_3, L) = S_3 \cdot \psi_A(t).}$$

**Q25.** Comme nous l'avons vu à la question **Q22**, $\psi_A(t)$ est non nul pour $t$ au voisinage de zéro et alors
$$S_3 = \frac{\det_{\mathcal{B}}(U_1, U_2, U_3, L)}{\psi_A(t)}.$$
Le lecteur avisé aura reconnu l'une des formules de Cramer…

Il ne reste plus qu'à calculer le numérateur ; pour cela je développe par rapport à la dernière colonne :
$$\det_{\mathcal{B}}(U_1, U_2, U_3, L) = \begin{vmatrix} 1-pt & 0 & -pt & 1 \\ -qt & 1-qt & 0 & 0 \\ 0 & -pt & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -qt & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -qt & 1-qt & 0 \\ 0 & -pt & 1 \\ 0 & 0 & -qt \end{vmatrix} = pq^2t^2$$
puisque cette dernière matrice est triangulaire ! D'où, compte tenu de **Q21**,
$$\boxed{S_3 = \frac{pq^2t^3}{-p^2qt^3 + pqt^2 - t + 1}.}$$

**Q26.** En regardant bien, je vois que le système $(\mathcal{H})$ considéré correspond à la recherche d'un vecteur propre de la matrice ${}^tA$. Or par hypothèse $\lambda$ est valeur propre de $A$, donc de ${}^tA$, puisque $A$ et ${}^tA$ ont le même polynôme caractéristique.

Je dispose donc d'un vecteur non nul $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ tel que ${}^tA\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \lambda.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire tel que
$$\left\{\begin{array}{rcrcl} px_1 & + & qx_2 & = & \lambda x_1 \\ qx_2 & + & px_3 & = & \lambda x_2 \\ px_1 & + & qx_4 & = & \lambda x_3 \\ & & 0 & = & \lambda x_4 \end{array}\right..$$

Comme $\lambda \neq 0$ par hypothèse, la quatrième ligne montre que nécessairement $x_4 = 0$ et il en résulte que
$$\boxed{x_1,\ x_2,\ x_3 \text{ sont non tous nuls et vérifient } (\mathcal{H}).}$$

**Q27.** $x_1$, $x_2$, $x_3$ étant trois complexes ainsi fixés, on a posé $M = \max(|x_1|, |x_2|, |x_3|)$. Comme $x_1$, $x_2$, $x_3$ sont non tous nuls, j'ai $M > 0$. J'opère une disjonction des cas :

- si $M = |x_3|$, alors nous sommes dans le cas **i)**
- sinon $|x_3| < M$ et de nouveau deux cas se présentent :
  * si $M = |x_2|$, alors nous sommes dans le cas **ii)**
  * sinon $|x_2| < M$ et comme $|x_3| < M$ nécessairement $M = |x_1|$, alors nous sommes dans le cas **iii)**.

En conclusion,

$$\boxed{\text{Nous sommes dans l'un des trois cas } \textbf{i), ii), iii)}.}$$

**Q28.** Il suffit de prouver le résultat dans les trois cas précédents !

- Dans le cas **i)** : $|x_3| = M > 0$, donc la troisième ligne de $(\mathcal{H})$ donne, en divisant par $x_3$ et en prenant les modules, puisque $|x_1| \leq M$ par définition,
$$|\lambda| = p\,\frac{|x_1|}{M} \leq p < 1.$$
- Dans le cas **ii)** : $|x_2| = M > 0$, donc la deuxième ligne de $(\mathcal{H})$ donne, en divisant par $x_2$ et grâce à l'inégalité triangulaire,
$$|\lambda| \leq q + p\,\frac{|x_3|}{M} < q + p \quad \text{car} \quad p > 0 \quad \text{et} \quad \frac{|x_3|}{M} < 1.$$
Or $p + q = 1$, j'ai donc ici aussi $|\lambda| < 1$.
- Dans le cas **iii)** : $|x_1| = M > 0$, donc la première ligne de $(\mathcal{H})$ donne, en divisant par $x_1$ et encore grâce à l'inégalité triangulaire,
$$|\lambda| \leq p + q\,\frac{|x_2|}{M} < p + q \quad \text{car} \quad q > 0 \quad \text{et} \quad \frac{|x_2|}{M} < 1.$$
Or $p + q = 1$, j'ai donc là aussi $|\lambda| < 1$.

Au final, dans tous les cas,

$$\boxed{|\lambda| < 1.}$$

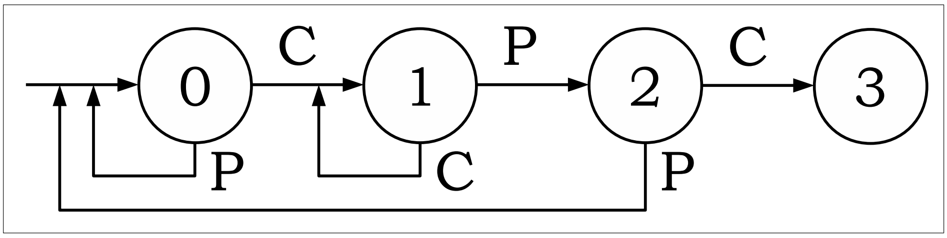
**Q29.** Le polynôme $\chi_A$ est de degré 4 et admet 0 comme racine **simple**, puisque nous avons vu à la question **Q20** que $\chi_A(0) = 0$ et $\chi_A'(0) = -p^2 q \neq 0$. D'après le théorème de d'Alembert, $\chi_A$ admet donc un système de racines de la forme $(0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ où $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ sont trois nombres complexes non nuls. Quitte à les réordonner, je peux supposer que
$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3|.$$
Or ces valeurs sont non nulles et de module strictement inférieur à 1 d'après **Q28**.
Comme $\chi_A$ est unitaire, je peux conclure que
$$\chi_A = X(X - \lambda_1)(X - \lambda_2)(X - \lambda_3) \quad \text{où} \quad 0 < |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3| < 1.$$

Soit alors $t \in \mathbb{R}^*$ ; j'ai d'après **Q21**
$$\psi_A(t) = t^4 \chi_A\left(\frac{1}{t}\right) = (1 - \lambda_1 t)(1 - \lambda_2 t)(1 - \lambda_3 t)$$
d'où, comme $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ sont non nuls,
$$\psi_A(t) = -\lambda_1\lambda_2\lambda_3\left(t - \frac{1}{\lambda_1}\right)\left(t - \frac{1}{\lambda_2}\right)\left(t - \frac{1}{\lambda_3}\right).$$
Ainsi, en posant $\mu = -\lambda_1\lambda_2\lambda_3$, $a = \dfrac{1}{\lambda_3}$, $b = \dfrac{1}{\lambda_2}$, $c = \dfrac{1}{\lambda_1}$, j'ai bien

$$\boxed{\mu \neq 0, \quad 1 < |a| \leq |b| \leq |c| \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \psi_A(t) = \mu(t-a)(t-b)(t-c).}$$

# Partie V – Étude d'un dernier cas

**Q30.** Voici le schéma complété selon l'algorithme décrit dans l'énoncé :




L'idée générale est d'éviter de repartir à 0 lorsque la ou les dernières lettres engendrées forment un *préfixe* de la chaîne attendue (ici CPC). Dans ce cas, c'est uniquement lorsqu'on obtient CC : on peut alors rester au niveau 1 puisqu'on vient d'obtenir un C. Voir la dernière question…

**Q31.** Il est clair par définition que (avec la notation définie plus loin dans l'énoncé et avec $L$ introduit au **IV**)

$$\boxed{S(0) = \begin{pmatrix} p_{0,0} \\ p_{0,1} \\ p_{0,2} \\ p_{0,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = L.}$$

**Q32.** Je fixe $n$ dans $\mathbb{N}^*$ et je considère le système complet d'événements $\left(E_{n-1,0}, E_{n-1,1}, E_{n-1,2}, E_{n-1,3}\right)$.
La formule des probabilités totales donne

$$p_{n,0} = p_{n-1,0} \cdot \mathbf{P}(E_{n,0}|E_{n-1,0}) + p_{n-1,1} \cdot \mathbf{P}(E_{n,0}|E_{n-1,1}) + p_{n-1,2} \cdot \mathbf{P}(E_{n,0}|E_{n-1,2}) + p_{n-1,3} \cdot \mathbf{P}(E_{n,0}|E_{n-1,3})$$

soit, compte tenu des règles de transition,

$$p_{n,0} = p_{n-1,0} \cdot p + p_{n-1,1} \cdot 0 + p_{n-1,2} \cdot p + p_{n-1,3} \cdot 0$$

qui est bien la première relation demandée. Les trois autres s'obtiennent de même.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } \begin{cases} p_{n,0} &= p \cdot p_{n-1,0} + p \cdot p_{n-1,2} \\ p_{n,1} &= q \cdot p_{n-1,0} + q \cdot p_{n-1,1} \\ p_{n,2} &= p \cdot p_{n-1,1} \\ p_{n,3} &= q \cdot p_{n-1,2} \end{cases}.}$$

**Q33.** Fixons $t \in \left]-1, 1\right[$. Pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$ je multiplie la première relation ci-dessus par $t^n$ et je somme membre à membre les égalités obtenues, pour $n$ allant de 1 à l'infini (toutes les séries sont absolument convergentes par comparaison à la série géométrique de raison $|t| < 1$, puisque toutes les probabilités sont au plus égales à 1). J'obtiens ainsi

$$S_0(t) - 1 = pt \cdot S_0(t) + pt \cdot S_2(t).$$

En procédant de même avec les trois autres relations, je trouve (là les coefficients constants sont nuls) :

$$\begin{cases} S_0(t) &= tp \cdot S_0(t) + tp \cdot S_2(t) + 1 \\ S_1(t) &= tq \cdot S_0(t) + tq \cdot S_1(t) \\ S_2(t) &= tp \cdot S_1(t) \\ S_3(t) &= tq \cdot S_2(t) \end{cases}.$$

Je reconnais bien l'égalité matricielle

$$S(t) = tAS(t) + L.$$

En conclusion

$$\boxed{\text{Pour tout } t \text{ dans } \left]-1, 1\right[,\ S(t) \text{ est solution de l'équation } (E_t).}$$

**Q34.** L'énoncé a admis que $T$ est une variable aléatoire ; alors par définition de l'expérience

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad p_{n,3} = \mathbf{P}(T = n)$$

puisque par construction l'accès au niveau 3 se produit au moment de l'obtention de la séquence CPC pour la première fois.

Par conséquent, la série génératrice de $T$ n'est autre que $S_3$. Or nous avons montré à la partie **IV** que, pour $t$ au voisinage de 0,

$$S_3(t) = \frac{pq^2t^3}{\psi_A(t)} = \frac{pq^2t^3}{\mu(t-a)(t-b)(t-c)} \quad \text{où} \quad 1 < |a| \leq |b| \leq |c|$$

et d'après **Q9** cette dernière fonction est développable en série entière avec un rayon de convergence au moins égal à $|a|$. Le même raisonnement qu'à la question **Q15** s'applique alors : l'égalité ci-dessus s'étend à l'intervalle $]-R_T, R_T[$ et donc

$$\boxed{\forall t \in ]-R_T, R_T[ \quad G_T(t) = \frac{pq^2t^3}{-p^2qt^3 + pqt^2 - t + 1}.}$$

**Q35.** Nous venons de voir que $R_T \geq |a| > 1$, donc $G_T$ est deux fois dérivable en 1, d'où

$$\boxed{T \text{ admet une espérance et une variance.}}$$

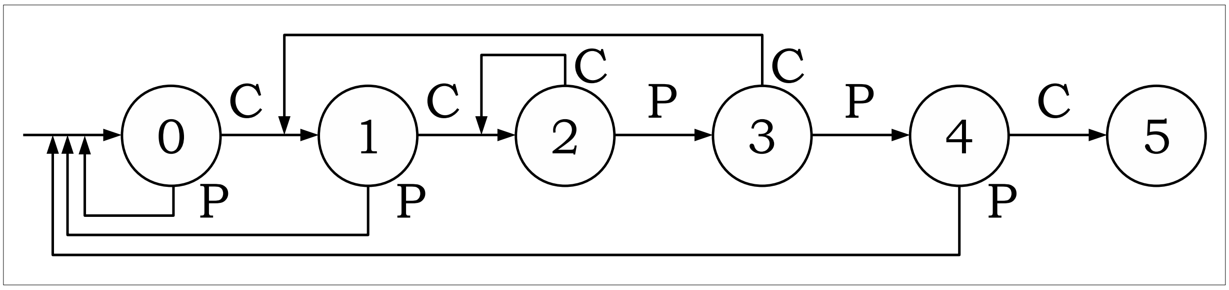
**Q36.** De plus $\mathbf{E}(T) = G_T'(1)$ qu'il faut calculer :

$$G_T'(1) = \frac{3pq^2\left(-p^2q + pq\right) - pq^2\left(-3p^2q + 2pq - 1\right)}{\left(-p^2q + pq\right)^2} = \frac{p^2q^3 + pq^2}{p^2q^4} = \frac{pq+1}{pq^2}$$

soit, en remplaçant $p$ par $1-q$,

$$\boxed{\mathbf{E}(T) = \frac{1+q-q^2}{q^2(1-q)} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2(1-q)}.}$$

**Q37.** Reprenons l'idée évoquée à la question **Q30** : à chaque fois que la construction de la séquence CCPPC est interrompue par une "mauvaise lettre", je reviens en arrière à l'état correspondant au plus long préfixe déjà acquis. Ce qui donne ce schéma :




Et la matrice associée se construit selon le principe utilisé à la question **Q32** : en numérotant lignes et colonnes de 0 à 5, $a_{i,j}$ est la probabilité de passer de l'état $j$ à l'état $i$ (cf. la formule des probabilités totales). Donc ici

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} p & p & 0 & 0 & p & 0 \\ q & 0 & 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & q & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q & 0 \end{pmatrix}}.$$

De même que dans l'étude précédente, la série génératrice $S_5$ de la variable aléatoire correspondant au temps d'attente de la séquence a pour somme la fonction rationnelle fournie par la formule de Cramer :

$$S_5(t) = \frac{1}{\psi_A(t)} \cdot \begin{vmatrix} 1-pt & -pt & 0 & 0 & -pt & 1 \\ -qt & 1 & 0 & -qt & 0 & 0 \\ 0 & -qt & 1-qt & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -pt & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -pt & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -qt & 0 \end{vmatrix}$$

où

$$\psi_A(t) = t^6\chi_A\left(\frac{1}{t}\right).$$

L'espérance cherchée est alors $S_5'(1)$, sous réserve que $S_5$ soit bien dérivable en 1...

L'énoncé demandait de "proposer une méthode", *a priori* la fin des calculs n'était pas demandée.

Cela dit, le déterminant ci-dessus se calcule tout aussi immédiatement qu'à la question **Q25**, en développant par rapport à la dernière colonne, ce qui amène le déterminant d'une matrice triangulaire !

Et le calcul de $\chi_A(x)$ se fait en un temps fini... Tous calculs fait,

$$S_5(t) = \frac{p^2q^3t^5}{-p^3q^2t^5 + p^2q^2t^4 - t + 1}$$

et je constate avec plaisir que $S_5$ est dérivable en 1, puisque le dénominateur pour $t = 1$ vaut $p^2q^3 > 0$.

Un dernier calcul donne

$$S_5'(1) = \frac{1}{q} + \frac{1}{p^2q^3}.$$

<u>*Note culturelle*</u> : le point de vue adopté dans ce sujet est utilisé dans le célèbre algorithme KMP (pour Knuth-Morris-Pratt), publié en 1970 et dédié à la recherche d'une séquence donnée dans un "texte". Ce type de recherche est bien sûr implémenté dans les logiciels de traitement de texte, mais aussi pour l'étude des séquences d'ADN...