Problème A : *autour de la fonction* Γ

1) Exemple du cours...

2) *Formule de Gauss*

a) Soit $x > 0$; je vais appliquer le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions (f_n) :

- $*$ les fonctions f_n sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}^{+*}$;
- $*$ soit $n \in \mathbb{N}^*$, j'ai la majoration classique : $\forall u > -1 \quad \ln(1+u) \leq u$, d'où, pour $t \in \left]0,n\right[$, $\ln\left(1-\dfrac{t}{n}\right) \leq -\dfrac{t}{n}$; multipliant par n, par croissance de l'exponentielle j'obtiens $\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$; cette inégalité étant encore vraie pour $t = n$, j'ai :
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \in \mathbb{R}^{+*} \quad |f_n(t)| \leq \varphi(t) \text{ en notant } \varphi : t \mapsto e^{-t}t^{x-1} \text{ ;}$$
φ est continue, intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ d'après **1)** ;
- $*$ enfin, la suite (f_n) converge simplement vers φ sur $\mathbb{R}^{+*}$ car, pour $t > 0$ fixé, $t \leq n$ à partir d'un certain rang (!) auquel cas
$$n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} -t \text{ , donc } \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}$$
et j'ai bien φ continue par morceaux sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Ainsi, le théorème de convergence dominée s'applique : les f_n sont intégrables et
$$\boxed{\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\mathrm{d}t.}$$

b) Soit n fixé dans $\mathbb{N}^*$; pour $a > 0$ et $p \in \mathbb{N}^*$, je pose
$$I_{p,a} = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^p t^{a-1}\mathrm{d}t \quad \text{(intégrale bien définie car } \left(1-\frac{t}{n}\right)^p t^{a-1} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-a}} \text{ et } 1-a<1.$$
En intégrant par parties sur $\left]0,n\right]$ (le crochet converge bien), j'obtiens
$$I_{p,a} = \left[\left(1-\frac{t}{n}\right)^p \frac{t^a}{a}\right]_{t\to 0}^{t=n} + \frac{p}{na}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^{p-1} t^a\mathrm{d}t = \frac{p}{na}I_{p-1,a+1} \text{ .}$$
J'en déduis, par une récurrence immédiate, que
$$I_{n,x} = \frac{n}{nx}I_{n-1,x+1} = \frac{n(n-1)}{n^2x(x+1)}I_{n-2,x+2} = \cdots = \frac{n!}{n^n x(x+1)\dots(x+n-1)}I_{0,x+n}.$$
Or $I_{0,x+n} = \dfrac{n^{x+n}}{x+n}$ d'où finalement, après simplification par n^n,
$$\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\mathrm{d}t = I_{n,x} = \frac{n^x.n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$
En conclusion, grâce à **a)** :
$$\boxed{\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^x.n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.}$$

3) *Formule de Weierstrass*

D'après **2)b),** j'ai, pour $x > 0$ fixé, comme $n^{-x} = \exp(-x\ln n)$:
$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(x)} &= \lim_{n\to\infty}\frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{n^x.n!} = x\lim_{n\to\infty} n^{-x}\prod_{k=1}^n\left(1+\frac{x}{k}\right) \\ &= xe^{\gamma x}\lim_{n\to\infty}\exp(-\gamma x - x\ln n)\prod_{k=1}^n\left(1+\frac{x}{k}\right) \text{ ;}\end{aligned}$$
je fais apparaître
$$\exp\left(\sum_{k=1}^n \frac{x}{k}\right)\cdot\prod_{k=1}^n \exp\left(-\frac{x}{k}\right) \quad \text{qui vaut 1 ;}$$

finalement :

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x} \lim_{n\to\infty} \exp\left(-\gamma x - x\ln n + \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{k}\right) \prod_{k=1}^{n} \left(\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right),$$

or, par définition de γ,

$$-\gamma x - x\ln n + \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{k} = x\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n - \gamma\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Il en résulte :

$$\boxed{\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x} \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right) \text{ cela pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}^{+*}.}$$

4) a) Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$ fixé ; d'après le résultat précédent,

$$\Psi(x) = -\ln\frac{1}{\Gamma(x)} = -\ln x - \gamma x - \ln\left[\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right)\right].$$

Or la suite de terme général $\prod_{k=1}^{n} \left(\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right)$ converge vers la limite strictement positive $\dfrac{1}{\Gamma(x)\, xe^{\gamma x}}$; la fonction ln est continue en ce point, donc

$$\begin{aligned}
\Psi(x) + \ln x + \gamma x &= -\lim_{n\to\infty} \ln\left[\prod_{k=1}^{n} \left(\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right)\right] \\
&= -\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x}{k} - \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\right)
\end{aligned}$$

Donc la série de terme général $\dfrac{x}{k} - \ln\left(1+\dfrac{x}{k}\right)$ converge (ce qui se prouve directement par un développement limité. . .) et :

$$\boxed{\Psi(x) = -\ln x - \gamma x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{k} - \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\right) \text{ cela pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}^{+*}.}$$

b) Pour bénéficier de la convergence normale de $\sum u_n'$, je fixe $b > 0$ et je me place sur $]0,b]$. Les fonctions u_n définies dans l'énoncé sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,b]$; la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0,b]$, sa somme étant $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n : x \mapsto \Psi(x) + \ln x + \gamma x$; et j'ai

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in]0,b] \quad u_n'(x) = \frac{x}{n(x+n)}, \quad \text{d'où} \quad |u_n'(x)| \le \frac{b}{n^2}.$$

Par comparaison à une série de Riemann ($2 > 1$!), il en résulte que la série de fonctions $\sum u_n'$ converge normalement, donc uniformément sur $]0,b]$; ainsi, par le théorème de dérivation terme à terme, S est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,b]$, cela pour tout $b > 0$. Finalement, S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ avec

$$S' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'.$$

Sachant que $\Psi : x \mapsto S(x) - \ln x - \gamma x$, j'en déduis grâce aux théorèmes opératoires classiques que

$$\boxed{\Psi \text{ est } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^{+*} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad \Psi'(x) = -\frac{1}{x} - \gamma + x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(x+n)}.}$$

En particulier, pour $x = 1$, j'obtiens

$$\Psi'(1) = -1 + \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+n)} = -1 - \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{1+n} \right) = -\gamma \ ;$$

en effet,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{1+n} \right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{1+n} \right) = \lim_{N\to\infty} \left(1 - \frac{1}{N+1} \right) = 1.$$

En conclusion,

$$\boxed{\Psi'(1) = -\gamma.}$$

c) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{n(x+n)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{x+n}$ est croissante, ainsi que la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$; or la somme d'une série de fonctions croissantes qui converge simplement est aussi croissante ; par conséquent,

$$\boxed{\Psi' \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^{+*} \text{ ; autrement dit } \Psi \text{ est convexe sur } \mathbb{R}^{+*}.}$$

5) *<u>Généralisation de la formule de Stirling</u>*

a) Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$; j'utilise le changement de variable $\mathcal{C}^1$ bijectif $u = x + t\sqrt{x}$:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} u^x e^{-u} \mathrm{d}u = \int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} \left(x + t\sqrt{x}\right)^x e^{-x-t\sqrt{x}} \sqrt{x} \mathrm{d}t = x^x e^{-x} \sqrt{x} \int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{\sqrt{x}}\right)^x e^{-t\sqrt{x}} \mathrm{d}t.$$

J'obtiens bien, avec les notations de l'énoncé :

$$\boxed{\Gamma(x+1) = \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{x} \int_{\mathbb{R}} f(x,t)\,\mathrm{d}t, \text{ cela pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}^{+*}.}$$

b) Soit x fixé dans $[1, +\infty[$; l'application g de l'énoncé est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$ et j'ai, tous calculs faits,

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad g'(t) = \frac{t^2\left(\sqrt{x} - 1\right)}{(t+1)\left(t + \sqrt{x}\right)} \geq 0 \ ;$$

g est donc croissante sur $\mathbb{R}^+$, donc à valeurs positives puisque $g(0) = 0$; par conséquent

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad x \ln\left(1 + \frac{t}{\sqrt{x}}\right) - t\sqrt{x} \leq \ln(1+t) - t,$$

d'où, par croissance de la fonction exponentielle :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad \left(1 + \frac{t}{\sqrt{x}}\right)^x e^{-t\sqrt{x}} \leq (1+t)\, e^{-t}.$$

Ainsi, puisque $f(x,t)$ est clairement positif,

$$\boxed{\forall x \in [1, +\infty[\quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad 0 \leq f(x,t) \leq (1+t)\, e^{-t}.}$$

c) De même, pour x fixé dans $[1, +\infty[$, l'application h de l'énoncé est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 0]$ et j'ai, tous calculs faits,

$$\forall u \in \left]-1, 0\right] \quad h'(u) = -\frac{u^2}{1+u} \leq 0 \ ;$$

h est donc décroissante sur $]-1, 0]$, donc à valeurs positives puisque $h(0) = 0$; par conséquent

$$\forall t \in \left]-\sqrt{x}, 0\right] \quad h\left(\frac{t}{\sqrt{x}}\right) \geq 0, \text{ soit } \quad \ln\left(1 + \frac{t}{\sqrt{x}}\right) - \frac{t}{\sqrt{x}} \leq -\frac{t^2}{2x},$$

d'où, en multipliant par x avant de prendre l'exponentielle :

$$\forall t \in \left]-\sqrt{x}, 0\right] \quad \left(1 + \frac{t}{\sqrt{x}}\right)^x e^{-t\sqrt{x}} \leq e^{-t^2/2}.$$

Ainsi, puisque $f(x,t)$ est toujours positif,

$$\boxed{\forall x \in [1, +\infty[\quad \forall t \in \left]-\sqrt{x}, 0\right] \quad 0 \leq f(x,t) \leq e^{-t^2/2}.}$$

d) Soit (x_n) une suite d'éléments de $[1, +\infty[$, de limite $+\infty$; soit (f_n) la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad f_n(t) = f(x_n, t).$$

Je vérifie les hypothèses du théorème de convergence dominée :

* les f_n sont continues sur $\mathbb{R}$;
* j'ai, grâce aux deux questions précédentes,
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad |f_n(t)| \leq \varphi(t) \quad \text{où} \quad \varphi : t \mapsto \begin{cases} e^{-t^2/2} & \text{si } t \leq 0 \\ (1+t)\,e^{-t} & \text{si } t > 0 \end{cases}.$$
φ est continue sur $\mathbb{R}$, intégrable sur $\mathbb{R}$ (il apparaît facilement que $\varphi(t) \underset{t\to\pm\infty}{=} o\left(1/t^2\right)$) ;
* la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $h : t \mapsto e^{-t^2/2}$: en effet, pour t réel fixé, j'ai pour n suffisamment grand $t \geq -\sqrt{x_n}$ (car $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$) et alors
$$\begin{aligned}\ln f_n(t) &= x_n \ln\left(1+\frac{t}{\sqrt{x_n}}\right) - t\sqrt{x_n} = x_n\left(\frac{t}{\sqrt{x_n}} - \frac{t^2}{2x_n} + o\left(\frac{1}{x_n}\right)\right) - t\sqrt{x_n} \\ &= -\frac{t^2}{2} + o(1) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\frac{t^2}{2}\end{aligned}$$
enfin h est continue sur $\mathbb{R}$;

Donc le théorème de convergence dominée s'applique : les f_n et h sont intégrables sur $\mathbb{R}$ et
$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} h(t)\,\mathrm{d}t.$$
Autrement dit :
$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x_n, t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2}\mathrm{d}t.}$$

e) Le changement de variable $\mathcal{C}^1$ bijectif $u = t/\sqrt{2}$ dans l'intégrale de Gauss donne facilement :
$$\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2}\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}.$$
Soit $F : x \mapsto \dfrac{\Gamma(x+1)}{(x/e)^x\sqrt{x}}$. J'ai prouvé, grâce à la question précédente, que, pour toute suite (x_n) de limite $+\infty$ (prenant donc ses valeurs dans $[1,+\infty[$ à partir d'un certain rang), la suite $\big(F(x_n)\big)$ converge vers $\sqrt{2\pi}$; d'après la caractérisation séquentielle des limites, j'ai donc
$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \sqrt{2\pi}.$$
Autrement dit :
$$\boxed{\Gamma(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x.}$$

Problème B : recherche de plans stables

1) Les deux dernières colonnes de U_1 donnent $u_1(e_2) = (0,0,1)$ et $u_2(e_3) = (-1,-3,-3)$, d'où
$$\widetilde{u_1}(e_1) = u_1(e_2) \wedge u_2(e_3) = (3,-1,0),$$
qui fournit la première colonne de $\widetilde{U_1}$. On obtient de même les autres colonnes de $\widetilde{U_1}$, ainsi que $\widetilde{U_2}$:
$$\boxed{\widetilde{U_1} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \widetilde{U_2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

2) $\mathcal{B}$ étant une base orthonormale directe, j'ai
$$e_1 = e_2 \wedge e_3\ ,\ e_2 = e_3 \wedge e_1\ ,\ e_3 = e_1 \wedge e_2. \tag{1}$$
Compte tenu du caractère alterné et antisymétrique du produit vectoriel, il en résulte que
$$\forall (i,j) \in [\![1,3]\!]^2 \quad \widetilde{u}(e_i \wedge e_j) = u(e_i) \wedge u(e_j).$$
Or les deux applications $(x,y) \mapsto \widetilde{u}(x \wedge y)$ et $(x,y) \mapsto u(x) \wedge u(y)$ sont bilinéaires et je viens de voir qu'elles coïncident sur tous les couples (e_i, e_j). Il en résulte, par bilinéarité :
$$\boxed{\forall (x,y) \in E^2 \quad \widetilde{u}(x \wedge y) = u(x) \wedge u(y).}$$

Si v vérifie

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad v(x \wedge y) = u(x) \wedge u(y)\,,$$

alors d'après les relations (1), v et $\widetilde{u}$ sont deux applications linéaires qui coïncident sur la base $\mathcal{B}$, donc

$$\boxed{v = \widetilde{u}.}$$

3) Toujours d'après les relations (1), $\widetilde{\mathrm{Id}_E}$ laisse invariants les vecteurs de la base $\mathcal{B}$, donc

$$\boxed{\widetilde{\mathrm{Id}_E} = \mathrm{Id}_E.}$$

Soit $(u,v) \in \mathcal{L}(E)^2$ et $(x,y) \in E^2$; d'après **2)**,

$$(\widetilde{u} \circ \widetilde{v})(x \wedge y) = \widetilde{u}\big(v(x) \wedge v(y)\big) = u[v(x)] \wedge u[v(y)] = (u \circ v)(x) \wedge (u \circ v)(y)\,.$$

Cette relation étant vraie pour tout (x,y) de E^2, j'en déduis d'après **2)** :

$$\boxed{\widetilde{u} \circ \widetilde{v} = \widetilde{u \circ v}.}$$

Si u est inversible, j'applique le résultat précédent avec $v = u^{-1}$: $\widetilde{u} \circ \widetilde{u^{-1}} = \widetilde{\mathrm{Id}_E} = \mathrm{Id}_E$. Comme il s'agit d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie, ce sont deux automorphismes inverses l'un de l'autre :

$$\boxed{\text{Si } u \text{ est inversible, alors } \widetilde{u} \text{ est inversible et } \widetilde{u}^{-1} = \widetilde{u^{-1}}.}$$

4) Soient C_1, C_2, C_3 (*resp.* $\widetilde{C_1}, \widetilde{C_2}, \widetilde{C_3}$) les vecteurs colonnes de U (*resp.* $\widetilde{U}$). Par définition de $\widetilde{u}$, les coordonnées de $\widetilde{C_1}, \widetilde{C_2}, \widetilde{C_3}$ dans $\mathcal{B}$ sont respectivement celles de $C_2 \wedge C_3, C_3 \wedge C_1, C_1 \wedge C_2$.

Déjà, si $\mathrm{rg}\, u \leq 1$, C_1, C_2, C_3 sont colinéaires et donc $\widetilde{U} = 0$, c'est-à-dire que $\mathrm{rg}\, \widetilde{u} = 0$.

Lorsque $\mathrm{rg}\, u = 3$, la question précédente montre que $\mathrm{rg}\, \widetilde{u} = 3$.

Reste le cas $\mathrm{rg}\, u = 2$, où le calcul de ${}^tU \times \widetilde{U}$ va nous être utile. D'après l'expression analytique du produit scalaire dans la base orthonormale $\mathcal{B}$, ${}^tU \times \widetilde{U}$ est remplie par les produits scalaires $\left(C_i \middle| \widetilde{C_j}\right)$; or ce produit scalaire vaut 0 pour $i \neq j$ car dans ce cas $\widetilde{C_j}$ est un produit vectoriel dont l'un des facteurs est C_i ! Et pour $i = j$ je reconnais grâce aux coordonnées du produit vectoriel le développement de $\det U$ par rapport à la colonne j. Or ici $\det U = 0$ puisque $\mathrm{rg}\, u < 3$. Donc ${}^tU \times \widetilde{U} = 0$, c'est-à-dire que $\mathrm{Im}\, \widetilde{U} \subset \mathrm{Ker}\, {}^tU$. Or ${}^tU$ est de rang 2 comme U, donc d'après le théorème du rang $\mathrm{rg}\, \widetilde{u} \leq 1$. Or dans ce cas $\widetilde{u}$ n'est pas nul : je peux choisir deux vecteurs x, y de E tels que $(u(x), u(y))$ soit libre (puisque $\mathrm{Im}\, u$ est de dimension 2) ; alors $\widetilde{u}(x \wedge y) = u(x) \wedge u(y) \neq 0$ par construction. En conclusion,

$$\boxed{\text{Si } \mathrm{rg}\, u \leq 1,\ \mathrm{rg}\, \widetilde{u} = 0\ ;\ \text{si } \mathrm{rg}\, u = 2,\ \mathrm{rg}\, \widetilde{u} = 1\ ;\ \text{si } \mathrm{rg}\, u = 3,\ \mathrm{rg}\, \widetilde{u} = 3.}$$

5) L'application $\phi : u \mapsto \widetilde{u}$ est bien une application de $\mathcal{L}(E)$ dans lui-même, mais :

- elle n'est pas linéaire : en effet $\widetilde{\lambda.u} = \lambda^2.\widetilde{u}$ (immédiat d'après la définition) ; par exemple
$$\phi(2.\mathrm{Id}_E) = 4.\phi(\mathrm{Id}_E) \neq 2.\phi(\mathrm{Id}_E) \quad \text{car} \quad \phi(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Id}_E \neq 0.$$
- elle n'est pas injective : pour u de rang 1 (par exemple une projection sur une droite), $u \neq 0$ alors que $\phi(u) = \phi(0) = 0$ (ne pas parler de $\mathrm{Ker}\, \phi$!!)
- elle n'est pas surjective : d'après ce qui précède, pour v de rang 2 (par exemple une projection sur un plan), v n'admet aucun antécédent par ϕ.

6) Par hypothèse, (x,y) est une base de P, donc déjà $x \wedge y \neq 0$. Notons v l'endomorphisme de P induit par u et posons $\mathcal{M}_{(x,y)}(v) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. J'ai ainsi

$$u(x) = a.x + b.y \quad \text{et} \quad u(y) = c.x + d.y$$

d'où en développant

$$\widetilde{u}(x \wedge y) = u(x) \wedge u(y) = (ad - bc)\,.x \wedge y$$

En conclusion,

$$\boxed{x \wedge y \text{ est un vecteur propre de } \widetilde{u} \text{ et la valeur propre associée est } \det v.}$$

7) Soit (x,y) une base orthonormale du plan normal au vecteur z considéré dans l'énoncé. z étant unitaire, j'ai $x \wedge y = \pm z$, donc — quitte à échanger x et y —

$$\boxed{\text{On peut fixer } (x,y) \text{ famille orthonormale de } E \text{ telle que } z = x \wedge y.}$$

Par construction, $\mathcal{X} = (x, y, z)$ est une base orthonormale directe de E.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & * \\ c & d & * \\ e & f & * \end{pmatrix}$ la matrice de u dans cette base.

J'ai par hypothèse $\widetilde{u}(z) = \lambda.z$ et par définition :

$$\widetilde{u}(z) = (cf - de).x + (be - af).y + (ad - bc).z$$

d'où, par unicité des coordonnées :

$$\lambda = ad - bc \quad \text{et} \quad \begin{cases} -de + cf = 0 \\ be - af = 0 \end{cases}.$$

Alors, si l'on suppose en outre $\lambda \neq 0$, le système ci-dessus, considéré comme un système linéaire d'inconnue (e, f), est homogène et de Cramer (son déterminant n'est autre que $ad-bc$!). Par conséquent $e = f = 0$, ce qui signifie que $u(x)$ et $u(y)$ sont dans $\mathrm{Vect}(x, y) = P$, autrement dit :

$$\boxed{P \text{ est stable par } u.}$$

8) J'ai vu au **4)** que u est de rang 3 si et seulement si $\widetilde{u}$ est de rang 3. Autrement dit :

$$\boxed{0 \text{ est valeur propre de } u \text{ si et seulement si } 0 \text{ est valeur propre de } \widetilde{u}.}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et P un plan stable par u :

$$\forall x \in P \quad (u - \lambda.\mathrm{Id}_E)(x) = u(x) - \lambda.x \in P$$

donc P est également stable par $u - \lambda.\mathrm{Id}_E$. En appliquant ce résultat à $v = u - \lambda.\mathrm{Id}_E$ et $\mu = -\lambda$, j'obtiens que, si P est stable par v, alors P est également stable par $v + \lambda.\mathrm{Id}_E = u$. En conclusion,

$$\boxed{\text{Pour tout réel } \lambda, \text{ les plans stable par } u \text{ sont les plans stables par } u - \lambda.\mathrm{Id}_E.}$$

Des questions **6)** et **7)**, il résulte que, si 0 n'est pas valeur propre de u, les plans stables par u sont les orthogonaux des droites stables par $\widetilde{u}$ (*i.e.* dirigées par un vecteur propre de $\widetilde{u}$). En effet, je viens de montrer que — dans ce cas — 0 n'est pas non plus valeur propre de $\widetilde{u}$ et donc le résultat du **7)** s'applique.

Si toutefois 0 est valeur propre de u, il suffit de choisir λ réel non valeur propre de u (qui n'en a qu'un nombre fini !) et d'appliquer la méthode précédente à $u - \lambda.\mathrm{Id}_E$ (qui est alors inversible et n'admet donc pas 0 pour valeur propre !).

9) Dans de cas de u_1, j'obtiens, tous calculs faits :

$$\chi_{\widetilde{U1}} = -(X-1)^3 \ , \ \mathrm{Sp}\,\widetilde{U_1} = \{1\} \quad \text{et} \quad E_1\left(\widetilde{U_1}\right) = \mathrm{Vect}(1, -1, 1).$$

Donc il n'existe qu'une droite stable par $\widetilde{u_1}$ et par conséquent :

$$\boxed{\text{L'unique plan stable par } u_1 \text{ est } P_1 \ / \ x - y + z = 0.}$$

N.B. Il s'agit de $\mathrm{Ker}\,(u_1 + \mathrm{Id}_E)^2$, $u_1 + \mathrm{Id}_E$ étant nilpotent d'indice 3...

Dans le cas de u_2, 0 est l'unique valeur propre. Je choisis par exemple $\lambda = 1$ et je considère $u_2 - \mathrm{Id}_E$ (qui est inversible !).

$$U_2 - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ \widetilde{U_2 - I_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\chi_{\widetilde{U_2 - I_3}} = -(X-1)\left(X^2+1\right) \ , \ \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}\left(\widetilde{U_2 - I_3}\right) = \{1\} \quad \text{et} \quad E_1\left(\widetilde{U_2 - I_3}\right) = \mathrm{Vect}(1, 0, -1).$$

Finalement

$$\boxed{\text{L'unique plan stable par } u_2 \text{ est } P_2 \ / \ x - z = 0.}$$

Problème B : décomposition QR

Partie I : existence d'une décomposition QR pour A inversible

1) a) La méthode de Gram-Schmidt permet de construire une base orthogonale $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ de E telle que :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad \mathrm{Vect}\,(x_1, \ldots, x_i) = \mathrm{Vect}\,(\omega_1, \ldots, \omega_i)$$

en posant :

$$\omega_1 = x_1 \quad \text{et} \quad \forall i \in \{2, \ldots, n\} \quad \omega_i = x_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle \omega_j, x_i \rangle}{\langle \omega_j, \omega_j \rangle} \cdot \omega_j.$$

En divisant les ω_j par leur norme, je ne modifie pas les Vect $(\omega_1, \ldots, \omega_i)$, d'où :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Il existe une base orthonormale } (y_1, \ldots, y_n) \text{ de } \mathbb{R}^n \text{ telle que :}\\ \forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad \mathrm{Vect}\,(x_1, \ldots, x_i) = \mathrm{Vect}\,(y_1, \ldots, y_i).\end{array}}$$

b) $(y_1, \ldots, y_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ telle que :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_i) = \mathrm{Vect}\,(y_1, \ldots, y_i)\,,$$

donc la matrice de passage Ω de la base canonique à $(y_1, \ldots, y_n)$ est orthogonale et triangulaire supérieure (puisque $\forall j \in \{1, \ldots, n\} \quad y_j \in \mathrm{Vect}\,(y_1, \ldots, y_j)$) ; alors ${}^t\Omega = \Omega^{-1}$ est triangulaire inférieure et supérieure donc diagonale ! Ω est ainsi diagonale et ses éléments diagonaux valent ± 1 puisque Ω est orthogonale :

$$\boxed{\forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad y_i = e_i \quad \text{ou} \quad y_i = -e_i.}$$

2) a) A étant inversible, $(A_{\bullet 1}, \ldots, A_{\bullet n})$ est une base de $\mathbb{R}^n$ à laquelle j'applique le **1)a)**. Soit Q la matrice de passage de la base canonique à la base orthonormale $(y_1, \ldots, y_n)$: $Q \in orth_n$. Soit R la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $R_{\bullet j}$ soit le vecteur colonne des coordonnées de $A_{\bullet j}$ dans la base $(y_1, \ldots, y_n)$; j'ai : $\forall j \in \{1, \ldots, n\} \quad A_{\bullet j} \in \mathrm{Vect}\,(y_1, \ldots, y_j)$ donc $R \in tsup_n$; en outre la formule de changement de base pour les coordonnées de $A_{\bullet j}$ s'écrit $A_{\bullet j} = QR_{\bullet j}$ donc en "rassemblant" les colonnes : $A = QR$. Enfin $R = Q^{-1}A$ est inversible donc $R \in tsup_n^*$:

$$\boxed{\text{Il existe } Q \in orth_n \text{ et } R \in tsup_n^* \text{ telles que } A = QR.}$$

b) Si l'un des éléments diagonaux de R est négatif, je peux remplacer par son opposée la colonne de Q et la ligne de R correspondantes sans modifier le produit QR (ce qui revient en fait à remplacer l'un des vecteurs de la nouvelle base par son opposé). En conclusion :

$$\boxed{A \text{ peut s'écrire } A = QR, \text{ avec } Q \in orth_n \text{ et } R \in tsup_n^{+*}.}$$

c) Si $A \in tsup_n^*$ et $A = QR$ avec $Q \in orth_n$ et $R \in tsup_n$, alors $R \in tsup_n^*$ (comme au **a)**) et $Q = AR^{-1}$ est orthogonale et triangulaire, donc par le raisonnement du **1)b)** :

$$\boxed{\text{Si } A \in tsup_n^* \text{ et } A = QR \text{ avec } Q \in orth_n \text{ et } R \in tsup_n, \text{ alors } Q \text{ est diagonale.}}$$

d) L'existence de la décomposition a été prouvée au **b)**. Pour montrer l'unicité, je suppose $QR = Q'R'$ avec Q, Q' dans $orth_n$ et R, R' dans $tsup_n^{+*}$. Alors $Q^{-1}Q' = RR'^{-1}$ est orthogonale et triangulaire supérieure, donc diagonale ; plus précisément $RR'^{-1} \in tsup_n^{+*}$ et finalement $Q^{-1}Q' = I_n$ d'où $Q' = Q$ et $R' = R$. En conclusion :

$$\boxed{A \text{ s'écrit de façon unique sous la forme } A = QR, \text{ avec } Q \in orth_n \text{ et } R \in tsup_n^{+*}.}$$

Partie II : décomposition QR par identification

1) ${}^t\left({}^tRR\right) = {}^tR\,{}^t\left({}^tR\right) = {}^tR\,R$ donc ${}^tRR$ est symétrique. En outre, pour X vecteur colonne non nul de $\mathbb{R}^n$,

$${}^tX\left({}^tRR\right)X = {}^t(RX)\,RX = \|RX\|^2 > 0,$$

car $R \in tsup_n^{+*}$ donc R est inversible, d'où $RX \neq 0$. Donc :

$$\boxed{{}^tRR \text{ est une matrice symétrique, définie positive.}}$$

2) a) $\left({}^tMM\right)Bu = u$ donc $SX = \left(\dfrac{0}{{}^tuBu - a}\right)$ d'où :

$$\boxed{\langle SX, X\rangle = a - {}^tuBu.}$$

b) <u>*Analyse*</u> : si $R = \left(\begin{array}{c|c} M & c \\ \hline (0) & b \end{array}\right)$ vérifie $S = {}^tRR$, c'est-à-dire $S = \left(\begin{array}{c|c} {}^tMM & {}^tMc \\ \hline {}^tcM & {}^tcc + b^2 \end{array}\right)$, nécessairement ${}^tMc = u$ et $b^2 = a - {}^tcc$ soit, puisque M est inversible et $b \in \mathbb{R}^{+*}$, $c = {}^tM^{-1}u$ et $b = \sqrt{a - {}^tuBu}$, avec $B = \left({}^tMM\right)^{-1}$ comme au **a)**.

<u>*Synthèse*</u> : je peux poser $c = {}^tM^{-1}u$ et $b = \sqrt{a - {}^tuBu}$, car M est inversible et $a - {}^tuBu > 0$ d'après **a),** puisque $X \neq 0$ et S définie positive par hypothèse ; j'ai bien $c \in \mathbb{R}^{n-1}$, $b \in \mathbb{R}^{+*}$ et $R = \left(\begin{array}{c|c} M & c \\ \hline (0) & b \end{array}\right)$ vérifie $S = {}^tRR$. Cette solution est la seule d'après l'analyse :

> Il existe une unique matrice R, de la forme $R = \left(\begin{array}{c|c} M & c \\ \hline (0) & b \end{array}\right)$ avec $c \in \mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}^{+*}$, vérifiant l'égalité $S = {}^tRR$.

3) Je montre par récurrence sur n la propriété $\mathcal{P}_n$ suivante : "S étant une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique, définie positive, l'équation ${}^tRR = S$ admet une unique solution R dans $tsup_n^{+*}$ ".

- Q_1 est triviale : si $S = (a)$, $a > 0$, l'unique solution est $R = (\sqrt{a})$!
- <u>*Hypothèse de récurrence*</u> : Q_{n-1} est vraie, pour $n \geq 2$.
- Soit alors S une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique, définie positive. Si S s'écrit ${}^tRR$, avec R dans $tsup_n^{+*}$, alors R s'écrit $\left(\begin{array}{c|c} M & c \\ \hline (0) & b \end{array}\right)$, avec $c \in \mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}^{+*}$; nécessairement $S = \left(\begin{array}{c|c} {}^tMM & {}^tMc \\ \hline {}^tcM & {}^tcc + b^2 \end{array}\right)$. Or S s'écrit $S = \left(\begin{array}{c|c} S' & u \\ \hline {}^tu & a \end{array}\right)$ avec $S' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$, $u \in \mathbb{R}^{n-1}$ et a réel. S' est symétrique car S l'est ; en outre S' est définie positive : si X' est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^{n-1}$, alors $X = \left(\dfrac{X'}{0}\right)$ est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ et, en notant encore $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^{n-1}$, j'ai $\langle S'X', X'\rangle = \langle SX, X\rangle > 0$ car S est définie positive.

  Ainsi M est nécessairement l'unique solution de l'équation $S' = {}^tMM$, avec $M \in tsup_{n-1}^{+*}$ fournie par l'hypothèse de récurrence et R l'unique matrice alors fournie par le **2)b)** ; et d'après **2)b)** cette matrice R convient !

> S étant une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique, définie positive, l'équation ${}^tRR = S$ admet une unique solution dans $tsup_n^{+*}$.

4) J'applique l'algorithme précédent ; si je trouve R, j'aurai montré que T est symétrique, définie positive (d'après **1)**) ! Je m'intéresse d'abord à $T' = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$ pour laquelle le **2)b)** fournit, avec $M = (2)$ et $a = 10$, $c = M^{-1}(6)$ et $b = \sqrt{a - {}^tcc} = 1$. Je vérifie bien que $T' = {}^tR'R'$ avec $R' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors, appliqué à T, le **2)b)** fournit, avec $M = R'$ et $a = 14$, $c = {}^tM^{-1}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $b = \sqrt{a - {}^tcc} = 3$.

Je vérifie bien que $T = {}^tRR$ avec $R = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

T est donc symétrique, définie positive et R est l'unique solution d'après **3).**

> L'équation ${}^tRR = T$ admet pour unique solution dans $tsup_3^{+*}$ $R = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

5) ${}^tAA = \begin{pmatrix} 9 & 21 & 3 \\ 21 & 74 & 6 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$. Comme ci-dessus, j'obtiens :

$$\boxed{\text{L'équation } {}^tRR = {}^tAA \text{ admet pour unique solution dans } tsup_3^{+*} : R = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 0 & 5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 7/5 \end{pmatrix}.}$$

A est donc inversible et, si $A = QR$, avec $Q \in orth_3$ et $R \in tsup_3^{+*}$, ${}^tAA = {}^tR{}^tQQR = {}^tRR$.
R est donc la matrice précédente et

$$Q = AR^{-1} = \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 10 & 5 \\ 5 & 2 & -14 \\ 10 & -11 & 2 \end{pmatrix}$$

(je vérifie avec plaisir que Q est bien une matrice orthogonale, même si c'est superflu d'après **I)** !).

$$\boxed{\text{La décomposition } QR \text{ de } A \text{ est donnée par : } Q = \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 10 & 5 \\ 5 & 2 & -14 \\ 10 & -11 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } R = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 0 & 5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 7/5 \end{pmatrix}.}$$

Partie III : décomposition QR par la méthode de Householder

1) a) Le vecteur u étant unitaire, la matrice u^tu est classiquement la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur la droite $\mathrm{Vect}(u)$; en effet son j-ième vecteur colonne est $u_j.u$, soit $\langle e_j, u\rangle .u$ qui est bien le projeté orthogonal de e_j sur $\mathrm{Vect}(u)$. Il en résulte que $H = I_n - 2.u^tu$ est la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan normal à $\mathrm{Vect}(u)$. En particulier,

$$\boxed{H \text{ est symétrique et orthogonale ; c'est la matrice de la réflexion d'hyperplan } \mathrm{Vect}(u)^\perp.}$$

b) D'après ce qui précède, H est semblable à $\mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -1)$. Ainsi, H admet comme valeurs propres 1 de multiplicité $n-1$ et -1 de multiplicité 1. En conclusion,

$$\boxed{H \text{ admet } -1 \text{ comme valeur propre simple et } \det H = -1.}$$

2) Par définition, si v est colinéaire à e_1, alors $H_n(v)\, v = I_n v = v$ qui est bien colinéaire à e_1.
Voyons maintenant le cas où v n'est pas colinéaire à e_1 ; je pose alors $u_1 = v - \|v\| .e_1$, qui n'est pas nul (sinon v serait colinéaire à e_1 !). Le vecteur u de l'énoncé est alors $u = \dfrac{1}{\|u_1\|}.u_1$, donc $\mathrm{Vect}(u_1) = \mathrm{Vect}(u)$ et $H_n(v)$ est d'après **1)** la matrice de la réflexion d'hyperplan $\mathrm{Vect}(u_1)^\perp$.
Or je constate que :

$$\begin{aligned} \|u_1\|^2 &= \|v\|^2 - 2\|v\| \langle v, e_1\rangle + \|v\|^2 \ \text{(car } e_1 \text{ est unitaire)} \\ &= 2\left(\|v\|^2 - \|v\| \langle v, e_1\rangle\right) \end{aligned}$$

tandis que, par définition de u_1, $\langle v, u_1\rangle = \|v\|^2 - \|v\| \langle v, e_1\rangle$.
Ainsi : $\|u_1\|^2 = 2\langle v, u_1\rangle$, c'est-à-dire $\langle u_1 - 2v, u_1\rangle = 0$.
Par conséquent, la décomposition de v selon la somme directe $\mathrm{Vect}(u_1)^\perp \oplus \mathrm{Vect}(u_1)$ est

$$v = \frac{1}{2}(2v - u_1) + \frac{1}{2}u_1,$$

d'où par définition d'une réflexion

$$H_n(v)\, v = \frac{1}{2}(2v - u_1) - \frac{1}{2}u_1 = v - u_1 = \|v\| .e_1.$$

On a donc bien dans tous les cas

$$\boxed{H_n(v)\, v \text{ est colinéaire à } e_1.}$$

3) a) Par définition du produit matriciel, le premier vecteur colonne de $B = H_n(A_{\bullet 1})\, A$ n'est autre que $H_n(A_{\bullet 1})\, A_{\bullet 1}$. Donc d'après **2)**

$$\boxed{\text{Si } A_{\bullet 1} \text{ est colinéaire à } e_1,\ B_{\bullet 1} = A_{\bullet 1}, \text{ sinon } B_{\bullet 1} = \|A_{\bullet 1}\| .e_1.}$$

b) J'effectue le produit par blocs :

$$HC = \begin{pmatrix} R_p & X \\ (0) & WV \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad WV = H_{n-p}(V_{\bullet 1})\, V.$$

Donc, d'après **a)**, le premier vecteur colonne de WV est colinéaire au premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^{n-p}$; WV est ainsi de la forme

$$WV = \begin{pmatrix} \alpha & L \\ (0) & V' \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad V' \in \mathcal{M}_{n-p-1}(\mathbb{R}).$$

Je pose alors $R_{p+1} = \begin{pmatrix} R_p & X_{\bullet 1} \\ (0) & \alpha \end{pmatrix}$ et HC apparaît sous la forme $HC = \begin{pmatrix} R_{p+1} & X' \\ (0) & V' \end{pmatrix}$.

Or C est inversible par hypothèse et H est inversible (cf. son déterminant par blocs, W étant inversible car matrice de symétrie). Donc HC est inversible, il en résulte que R_{p+1} et V' sont inversibles (toujours le déterminant par blocs !). Par conséquent $\alpha \neq 0$ et $R_{p+1} \in tsup^*_{p+1}$. Au final

$$\boxed{D = HC \text{ s'écrit } D = \begin{pmatrix} R_{p+1} & X' \\ (0) & V' \end{pmatrix} \text{ où } R_{p+1} \in tsup^*_{p+1} \text{ et } V' \in GL_{n-p-1}(\mathbb{R}).}$$

c) Je pose (habilement) $H^{(1)} = H_n(A_{\bullet 1})$. D'après **a)**, $H^{(1)}A$ est de la forme C étudiée au **b)** avec $p = 1$ ($A_{\bullet 1}$ n'est pas nul puisque A est inversible par hypothèse). Alors le **b)** me fournit par une récurrence immédiate $H^{(2)}, \ldots, H^{(n-1)}$ telles que

$$H^{(n-1)} \ldots H^{(2)} H^{(1)} A = \begin{pmatrix} R_{n-1} & X^{(n-2)} \\ (0) & V^{(n-2)} \end{pmatrix}$$

où $R_{n-1} \in tsup^*_{n-1}$ et $V^{(n-2)} \in GL_1(\mathbb{R})$, qui est donc un scalaire non nul ! Ainsi

$$\boxed{R = H^{(n-1)} \ldots H^{(2)} H^{(1)} A \in tsup^*_n.}$$

En regardant de plus près l'algorithme du **b)**, je vois que, pour tout p de $[\![1, n-2]\!]$, $H^{(p+1)}$ est de la forme $\begin{pmatrix} I_p & (0) \\ (0) & W \end{pmatrix}$, où W est une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{R})$ (c'est la matrice d'une réflexion).

Il en résulte que $H^{(p+1)}$ est également orthogonale (c'est même une matrice de réflexion : elle est semblable à $\operatorname{diag}(1, \ldots, 1, -1)$ avec une matrice de passage orthogonale…).

Comme les $H^{(p)}$ sont inversibles, en posant $Q = H^{(1)} \ldots H^{(n-1)}$, j'ai $A = QR$ avec $Q \in orth_n$ d'après la remarque précédente et $R \in tsup^*_n$ par construction. On en déduit la décomposition QR de A, quitte à changer les signes de quelques colonnes de Q et des lignes correspondantes de R, de sorte que $R \in tsup^{+*}_n$.

$$\boxed{\text{J'ai bien obtenu la décomposition } QR \text{ de } A.}$$

4) Repartons donc de $A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. $A_{\bullet 1}$ n'est pas colinéaire à e_1, donc, pour définir $H^{(1)}$, je pose

$$u_1 = A_{\bullet 1} - \|A_{\bullet 1}\| e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 3.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

d'où

$$H^{(1)} = I_3 - 2 \cdot \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

(je reconnais avec plaisir une matrice de réflexion…). Je calcule alors

$$H^{(1)}A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(dont le premier vecteur colonne est bien celui attendu !).

Je réitère en déterminant, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, H_2, ce qui m'amène à poser

$$u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

et

$$H_2\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = I_2 - 2 \cdot \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix},$$

d'où

$$H^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & 3/5 \\ 0 & 3/5 & -4/5 \end{pmatrix}.$$

Il vient alors

$$R = H^{(2)}H^{(1)}A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 0 & 5 & -1/5 \\ 0 & 0 & -7/5 \end{pmatrix}$$

et

$$Q = H^{(1)}H^{(2)} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 10 & 10 & -5 \\ 5 & 2 & 14 \\ 10 & -11 & -2 \end{pmatrix}.$$

Cela redonne bien la décomposition du **II-5)**, en changeant les signes de la dernière colonne de Q et de la dernière ligne de R.