D.S. 4 *(4 heures)*

Problème A : *autour de la fonction* Γ

1) Justifier la définition, pour $x \in]0,+\infty[$, de $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$.

2) *Formule de Gauss*

a) Soit $x \in]0,+\infty[$. À l'aide de la suite de fonctions (f_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \in \mathbb{R}^{+*} \quad f_n(t) = \begin{cases} \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n t^{x-1} & \text{si } t \in]0,n] \\ 0 & \text{si } t > n \end{cases},$$

établir :

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\mathrm{d}t.$$

b) Grâce à des intégrations par parties, en déduire :

$$\forall x \in]0,+\infty[\quad \Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x \cdot n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

3) *Formule de Weierstrass*

On rappelle que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n\right)_{n\geq 1}$ converge dans $\mathbb{R}$. Sa limite est notée γ (*constante d'Euler*).

Établir :

$$\forall x \in]0,+\infty[\quad \frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x} \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^n \left(\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right).$$

4) *Dérivée logarithmique de* Γ : on note $\Psi = \ln \circ \Gamma : x \mapsto \ln \Gamma(x)$.

a) Montrer que

$$\forall x \in]0,+\infty[\quad \Psi(x) = -\ln x - \gamma x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right).$$

b) En étudiant la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad u_n(x) = \frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right),$$

montrer que Ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad \Psi'(x) = -\frac{1}{x} - \gamma + x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(x+n)}.$$

En déduire la valeur de $\Psi'(1)$.

c) Montrer que Ψ' est croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ (on dit que Γ est *logarithmiquement convexe*).

5) *Généralisation de la formule de Stirling*

a) À l'aide d'un changement de variable, établir

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad \Gamma(x+1) = \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{x}\int_{\mathbb{R}} f(x,t)\,\mathrm{d}t \quad \text{où} \quad f(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq -\sqrt{x} \\ \left(1+\dfrac{t}{\sqrt{x}}\right)^x e^{-t\sqrt{x}} & \text{si } t > -\sqrt{x} \end{cases}.$$

b) En étudiant, pour $x \in [1,+\infty[$ fixé, les variations sur $\mathbb{R}^+$ de la fonction
$$g : t \mapsto \ln(1+t) - t - x\ln\left(1+\frac{t}{\sqrt{x}}\right) + t\sqrt{x},$$
montrer que
$$\forall x \in [1,+\infty[\quad \forall t \in [0,+\infty[\quad 0 \leq f(x,t) \leq (1+t)\,e^{-t}.$$

c) En étudiant, pour $x \in [1,+\infty[$ fixé, les variations sur $]-1,0]$ de la fonction
$$h : u \mapsto -\ln(1+u) + u - \frac{u^2}{2},$$
montrer que
$$\forall x \in [1,+\infty[\quad \forall t \in \left]-\sqrt{x},0\right] \quad 0 \leq f(x,t) \leq e^{-t^2/2}.$$

d) En déduire que, pour toute suite (x_n) de réels appartenant à $[1,+\infty[$, de limite $+\infty$, on a
$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x_n,t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2}\mathrm{d}t.$$

e) On rappelle que : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2}\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$. Montrer que :
$$\Gamma(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x.$$

Problème B : recherche de plans stables

Le but du problème est la recherche des plans stables par un endomorphisme, en relation avec la notion de produit vectoriel.
Dans tout le problème, E désigne l'espace vectoriel euclidien orienté $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire canonique, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique, orthonormale directe.
On désigne par $\wedge$ le produit vectoriel dans E.
Si $u \in \mathcal{L}(E)$, on définit $\widetilde{u}$, endomorphisme de E, par sa restriction à $\mathcal{B}$:
$$\widetilde{u}(e_1) = u(e_2) \wedge u(e_3) \ ; \quad \widetilde{u}(e_2) = u(e_3) \wedge u(e_1) \ ; \quad \widetilde{u}(e_3) = u(e_1) \wedge u(e_2).$$

1) Dans cette question, on considère les endomorphismes u_1, u_2 de E, de matrices respectives U_1, U_2 dans la base $\mathcal{B}$:
$$U_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \ ; \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Déterminer $\widetilde{U_1}$ et $\widetilde{U_2}$, matrices respectives dans la base $\mathcal{B}$ de $\widetilde{u_1}$ et $\widetilde{u_2}$.

2) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :
$$\forall (x,y) \in E^2 \quad \widetilde{u}(x \wedge y) = u(x) \wedge u(y).$$
Montrer que, si $v \in \mathcal{L}(E)$ vérifie
$$\forall (x,y) \in E^2 \quad v(x \wedge y) = u(x) \wedge u(y)$$
alors $v = \widetilde{u}$.

3) Déterminer $\widetilde{\mathrm{Id}_E}$.
Si u et v sont dans $\mathcal{L}(E)$, montrer que $\widetilde{u \circ v} = \widetilde{u} \circ \widetilde{v}$.
Si u est inversible, en conclure que $\widetilde{u}$ est inversible et en exprimer l'inverse.

4) Préciser le rang de $\widetilde{u}$ selon la valeur de celui de u *(on pourra calculer le produit* ${}^tU \times \widetilde{U}$*, où* U *(*resp. $\widetilde{U}$*) désigne la matrice de* u *(*resp. *de* $\widetilde{u}$*) dans la base* $\mathcal{B}$*).*

5) L'application de $\mathcal{L}(E)$ dans lui-même qui à u associe $\widetilde{u}$ est-elle linéaire ? injective ? surjective ?

6) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P = \text{Vect}(x, y)$ un plan stable par u.
Montrer que $x \wedge y$ est vecteur propre de $\widetilde{u}$; exprimer la valeur propre associée à $x \wedge y$ à l'aide de l'endomorphisme v induit par u sur P.

7) Inversement, soit z un vecteur propre de norme 1 de $\widetilde{u}$.
Montrer qu'il existe (x, y) famille orthonormale de E telle que $x \wedge y = z$.
Si la valeur propre associée à z est non nulle, montrer que $P = \text{Vect}(x, y)$ est un plan stable par u. On pourra remarquer que (x, y, z) est une base orthonormale directe de E et effectuer des calculs dans cette base.

8) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que 0 est valeur propre de u si et seulement si 0 est valeur propre de $\widetilde{u}$.
Montrer que, pour tout réel λ, les plans stables par u sont les plans stables par $u - \lambda \text{Id}_E$.
En déduire un moyen pour obtenir les plans stables par $u \in \mathcal{L}(E)$ n'ayant pas 0 pour valeur propre, puis par u quelconque dans $\mathcal{L}(E)$.

9) Appliquer cette méthode à la recherche des plans stables par l'endomorphisme u_1 (*resp.* u_2) de $\mathbb{R}^3$ défini à la question **1)**.

Problème C : décomposition QR

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel au moins égal à 2.
On identifie l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ avec $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour une matrice carrée A d'ordre n, on note $A_{i,j}$ le terme de la i-ième ligne et de la j-ième colonne de A et $A_{\bullet j}$ la j-ième colonne de A. Soient :

- $orth_n = \{Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ (Q_{\bullet 1}, ..., Q_{\bullet n}) \text{ est orthonormale}\}$;
- $tsup_n = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ A_{i,j} = 0 \text{ si } i > j\}$;
- $tsup_n^* = \{A \in tsup_n \ / \ A_{i,i} \neq 0 \text{ pour } i = 1, ..., n\}$;
- $tsup_n^{+*} = \{A \in tsup_n \ / \ A_{i,i} > 0 \text{ pour } i = 1, ..., n\}$.

$(e_1, ..., e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ étant muni du produit scalaire pour lequel cette base est orthonormale. On note $\langle u, v\rangle$ le produit scalaire des vecteurs u et v et $\|u\|$ la norme de u.

On dit d'une matrice symétrique S de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qu'elle est *définie positive* lorsque, pour tout vecteur colonne X de $\mathbb{R}^n$: $X \neq 0 \Rightarrow {}^tXSX > 0$.

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que A admet *une décomposition* QR s'il existe $R \in tsup_n$ et $Q \in orth_n$ telles que $A = QR$.

Partie I : existence d'une décomposition QR pour A inversible

1) **a)** Soit $(x_1, ..., x_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe une base orthonormale $(y_1, ..., y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que :
$$\forall i \in \{1, ..., n\} \quad \text{Vect}(x_1, ..., x_i) = \text{Vect}(y_1, ..., y_i).$$
b) Soit $(y_1, ..., y_n)$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ telle que :
$$\forall i \in \{1, ..., n\} \quad \text{Vect}(e_1, ..., e_i) = \text{Vect}(y_1, ..., y_i).$$
Montrer que : $\forall i \in \{1, ..., n\} \quad y_i = e_i \quad \text{ou} \quad y_i = -e_i$.

2) Soit A une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
a) Montrer qu'il existe $Q \in orth_n$ et $R \in tsup_n^*$ telles que $A = QR$.
b) Montrer que A peut s'écrire $A = QR$, avec $Q \in orth_n$ et $R \in tsup_n^{+*}$.
c) Montrer que, si $A \in tsup_n^*$ et $A = QR$ avec $Q \in orth_n$ et $R \in tsup_n$, alors Q est diagonale.
d) Montrer que A s'écrit de façon unique sous la forme $A = QR$, avec $Q \in orth_n$ et $R \in tsup_n^{+*}$. Cette décomposition sera dorénavant appelée ***la décomposition*** QR de A.

Partie II : décomposition QR par identification

1) Soit $R \in tsup_n^{+*}$. Montrer que ${}^tRR$ est une matrice symétrique, définie positive.

2) Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique, définie positive, de la forme $S = \left(\begin{array}{c|c} {}^tMM & u \\ \hline {}^tu & a \end{array}\right)$,

avec $M \in tsup_{n-1}^{+*}$, $u \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $a \in \mathbb{R}$.

a) Soit $X = \left(\begin{array}{c} Bu \\ \hline -1 \end{array}\right)$ avec $B = \left({}^tMM\right)^{-1}$. Calculer $\langle SX, X\rangle$.

b) Montrer qu'il existe une unique matrice R, de la forme $R = \left(\begin{array}{c|c} M & c \\ \hline (0) & b \end{array}\right)$ avec $c \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $b \in \mathbb{R}^{+*}$, vérifiant l'égalité : $S = {}^tRR$.

3) S étant une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique, définie positive, montrer que l'équation ${}^tRR = S$ admet une unique solution dans $tsup_n^{+*}$.

4) Soit la matrice $T = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 4 \\ 6 & 10 & 7 \\ 4 & 7 & 14 \end{pmatrix}$. Résoudre, dans $tsup_3^{+*}$, l'équation ${}^tRR = T$.

5) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Résoudre, dans $tsup_3^{+*}$, l'équation ${}^tRR = {}^tAA$.

En déduire la décomposition QR de A.

Partie III : décomposition QR par la méthode de Householder

1) Pour u, vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$, on pose $H = I_n - 2.u\,{}^tu$.

a) Montrer que H est symétrique et orthogonale. Que représente géométriquement H ?

b) Montrer que -1 est valeur propre simple de H et calculer $\det H$.

2) On rappelle que e_1 est le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Soit $n > 1$ un entier naturel et v dans $\mathbb{R}^n$.
Si v est colinéaire à e_1, on pose $H_n(v) = I_n$, si v n'est pas colinéaire à e_1, on pose

$$H_n(v) = I_n - 2.u\,{}^tu \quad \text{avec} \quad u = \frac{1}{\left\|v - \|v\|.e_1\right\|}.\left(v - \|v\|.e_1\right).$$

Calculer $H_n(v)\,v$ (on vérifiera que ce vecteur est colinéaire à e_1).

3) Soit A une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Soit $B = H_n(A_{\bullet 1})\,A$. Calculer $B_{\bullet 1}$.

b) Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, inversible, de la forme :

$$C = \begin{pmatrix} R_p & X \\ (0) & V \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad 0 < p < n-1,\ R_p \in tsup_p^*,\ V \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{R}).$$

On pose

$$H = \begin{pmatrix} I_p & (0) \\ (0) & W \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad W = H_{n-p}(V_{\bullet 1}).$$

Quelle est la forme de la matrice $D = HC$?

c) Montrer qu'il existe une suite finie de matrices $H^{(i)}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$R = H^{(n-1)}H^{(n-2)}\dots H^{(2)}H^{(1)}A \in tsup_n^*$$

En déduire la décomposition QR de A.

4) Retrouver par cette méthode la décomposition QR de la matrice A de la question **II-5)**.