Problème A : méthodes itératives

Questions préliminaires

1) Déjà l'application considérée est bien une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^+$ (plus grand élément d'un nombre fini de réels positifs ou nuls). Je note N_1 la norme usuelle sur $\mathbb{R}^n$:

$$X = (x_1, \dots, x_n) \mapsto N_1(X) = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$$

de sorte que, pour $A = [a_{i,j}]$, j'ai avec les notations de l'énoncé $|||A||| = \|(N_1(L_1), \dots, N_1(L_n))\|$ où L_i désigne la ligne i de la matrice A. $\|\cdot\|$ et N_1 étant des normes sur $\mathbb{R}^n$, les propriétés de séparation, homogénéité et l'inégalité triangulaire viennent immédiatement.

$$\boxed{|||\cdot||| \text{ est une norme sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

Par souci de modularité, j'écris d'abord une fonction `Ninfini` (*resp.* `N1`) qui calcule $\|X\|$ (*resp.* $N_1(X)$) où X est un tableau à une dimension

```
def Ninfini(X):
    m=0
    for x in X:
        if abs(x)>m: m=abs(x)
    return m
```

```
def N1(X):
    s=0
    for x in X:
        s+=abs(x)
    return s
```

Je propose alors deux versions pour une fonction `N` qui calcule $|||A|||$:

```
def N(A):
    return Ninfini([N1(A[i]) for i in range(len(A))])
```

Cette première version est naturelle compte tenu de la remarque précédente. On peut l'alléger si l'on utilise le fait qu'un tableau `numpy` à deux dimensions est stocké comme la “collection” de ses lignes (d'où le fonctionnement de `len`...).

```
def N(A):
    return Ninfini([N1(L) for L in A])
```

2) Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. $AX = (y_i)_{1 \le i \le n}$ avec, pour $i \in \mathbb{N}_n$, par définition de $\|X\|$ et de $|||A|||$,

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \text{ , d'où } |y_i| \le \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \, |x_j| \le \|X\| \cdot \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \le \|X\| \cdot |||A||| \ .$$

Il en résulte, maintenant par définition de $\|AX\|$, qui est l'un des $|y_i|$:

$$\boxed{\|AX\| \le |||A||| \cdot \|X\| \, .}$$

Partie 1 – *Méthode de Jacobi*

1) a) D est une matrice diagonale, les coefficients de la diagonale étant tous non nuls (puisque $|a_{i,i}|$ est strictement supérieur à une somme positive ou nulle) ; donc D est inversible :

$$\boxed{J = D^{-1}(E + F) \text{ est bien définie.}}$$

b) De plus, D^{-1} est la matrice diagonale $\operatorname{diag}\left(\dfrac{1}{a_{1,1}}, \dots, \dfrac{1}{a_{n,n}}\right)$, donc $J = (\alpha_{i,j})$, avec

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{-a_{i,j}}{a_{i,i}} & \text{si } i \ne j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases} .$$

Par conséquent, A étant à diagonale strictement dominante,

$$\forall i \in \mathbb{N}_n \quad \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{i,j}| = \sum_{j\neq i} \left|\frac{a_{i,j}}{a_{i,i}}\right| = \frac{1}{|a_{i,i}|} \sum_{j\neq i} |a_{i,j}| < 1 \ .$$

Comme $\|\!|J|\!\|$ est la plus grande de ces valeurs, c'est l'une d'entre elles :

$$\boxed{\|\!|J|\!\| < 1 \ .}$$

2) **a)** Y est fixé dans $\mathbb{R}^n$; par définition de D, E, F, sachant de plus que D est inversible, j'obtiens :

$$AY = 0 \Leftrightarrow DY = (E+F)\,Y \Leftrightarrow Y = D^{-1}\,(E+F)\,Y \ .$$

Autrement dit,

$$\boxed{AY = 0 \Leftrightarrow Y = JY \ .}$$

b) Des questions précédentes, il résulte que, si Y est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ tel que $AY = 0$, alors

$$\|Y\| = \|JY\| \leq \|\!|J|\!\| \cdot \|Y\| \ , \text{ avec } \|\!|J|\!\| < 1, \text{ d'où nécessairement } \|Y\| = 0.$$

L'endomorphisme canoniquement associé à A est donc injectif, donc

$$\boxed{A \text{ est inversible } \textit{(théorème de Hadamard).}}$$

3) Par hypothèse, $A\Lambda = B$, donc

$$D\Lambda = (E+F)\,\Lambda + B, \text{ d'où } \Lambda = J\Lambda + D^{-1}B \ .$$

J'en déduis, pour $k \in \mathbb{N}$, compte tenu de la relation $X^{(k+1)} = JX^{(k)} + D^{-1}B$, par soustraction membre à membre :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \quad X^{(k+1)} - \Lambda = J\left(X^{(k)} - \Lambda\right).}$$

Grâce à la question préliminaire, j'obtiens

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \left\|X^{(k+1)} - \Lambda\right\| \leq \|\!|J|\!\| \cdot \left\|X^{(k)} - \Lambda\right\| \ ,$$

d'où, par une récurrence immédiate,

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \left\|X^{(k)} - \Lambda\right\| \leq \|\!|J|\!\|^k \cdot \left\|X^{(0)} - \Lambda\right\|.$$

Comme $\|\!|J|\!\| < 1$, la suite majorante ci-dessus converge vers 0, d'où grâce au théorème d'encadrement :

$$\boxed{\text{La suite } \left(X^{(k)}\right) \text{ converge vers } \Lambda.}$$

Partie 2 – *Méthode de Gauss-Seidel*

1) $D-E$ est une matrice triangulaire inférieure, dont les éléments non nuls sont ceux de A ; en particulier, les éléments diagonaux sont non nuls, donc $D-E$ est inversible :

$$\boxed{L = (D-E)^{-1}F \text{ est bien définie.}}$$

2) **a)** J'ai $(D-E)\,Y = FX$, d'où, par définition de D, E, F :

$$\forall i \in \mathbb{N}_n \quad \sum_{j=1}^{i} a_{i,j}y_j = \sum_{j=i+1}^{n} (-a_{i,j})\,x_j \ ,$$

d'où, $a_{i,i}$ étant non nul :

$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N}_n \quad y_i = -\frac{1}{a_{i,i}}\left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}y_j + \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}x_j\right).}$$

b) En particulier,

$$|y_1| = \frac{1}{|a_{1,1}|}\left|\sum_{j=2}^{n} a_{1,j}x_j\right| \leq \frac{1}{|a_{1,1}|}\sum_{j=2}^{n} |a_{1,j}| \cdot |x_j| \leq \left(\frac{1}{|a_{1,1}|}\sum_{j=2}^{n} |a_{1,j}|\right) \cdot \|X\|$$

d'où, comme A est à diagonale strictement dominante et $\|X\| > 0$:

$$\boxed{|y_1| < \|X\|.}$$

c) Soit alors i, $2 \leq i \leq n$ tel que

$$\forall j \in \mathbb{N}_{i-1} \quad |y_j| < \|X\| .$$

D'après **a)**,

$$|y_i| \leq \frac{1}{|a_{i,i}|}\left(\sum_{j=1}^{i-1} |a_{i,j}| \cdot \|X\| + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{i,j}| \cdot \|X\|\right) \leq \left(\frac{1}{|a_{i,i}|}\sum_{j\neq i} |a_{i,j}|\right) \cdot \|X\| < \|X\| .$$

Je viens d'établir par récurrence forte que : $\forall i \in \mathbb{N}_n \quad |y_i| < \|X\|$.

Comme $\|Y\|$ est l'un des $|y_i|$, je conclus :

$$\boxed{\|Y\| < \|X\|.}$$

3) a) Par définition, $|||L|||$ est le plus grand élément de l'ensemble des $\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$, pour i décrivant $\mathbb{N}_n$. En particulier, c'est un élément dudit ensemble :

$$\boxed{\text{Il existe } i_0 \text{ dans } \mathbb{N}_n \text{ tel que } |||L||| = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{i_0,j}|.}$$

b) Par définition des ε_j, j'ai : $\forall j \in \mathbb{N}_n \quad |\alpha_{i_0,j}| = \alpha_{i_0,j} \cdot \varepsilon_j$. Par conséquent, la composante d'indice i_0 du vecteur LX_0 n'est autre que $|||L|||$. Donc : $\|LX_0\| \geq |||L|||$.

De plus, X_0 est de norme 1, donc : $\|LX_0\| \leq |||L|||$. Finalement :

$$\boxed{\|LX_0\| = |||L|||.}$$

c) X_0 étant non nul, j'ai d'après **2)c)** $\|LX_0\| < \|X_0\|$; or $\|X_0\| = 1$, donc

$$\boxed{|||L||| < 1.}$$

4) a) $A\Lambda = B$, donc $(D-E)\,\Lambda = F\Lambda + B$, d'où $\Lambda = L\Lambda + (D-E)^{-1}B$, d'où, en comparant avec la relation de récurrence définissant la suite $\left(Y^{(k)}\right)$:

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \quad Y^{(k+1)} - \Lambda = L\left(Y^{(k)} - \Lambda\right).}$$

b) En majorant comme pour la méthode de Jacobi par une suite géométrique de raison $|||L||| < 1$, j'obtiens :

$$\boxed{\text{La suite } \left(Y^{(k)}\right) \text{ converge vers } \Lambda.}$$

c) J'ai

$$(D-E)\,Y^{(k+1)} = FY^{(k)} + B ,$$

d'où, en notant, pour tout k, $Y^{(k)} = \left(y_1^{(k)}, \ldots, y_n^{(k)}\right)$ et $B = (b_1, \ldots, b_n)$:

$$\forall i \in \mathbb{N}_n \quad \sum_{j=1}^{i} a_{i,j} y_j^{(k+1)} = -\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} y_j^{(k)} + b_i ,$$

ou encore

$$\forall i \in \mathbb{N}_n \quad y_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{i,i}}\left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} y_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} y_j^{(k)} - b_i\right).$$

Ainsi, connaissant $Y^{(k)}$, je peux calculer successivement $y_1^{(k+1)}, y_2^{(k+1)}, \ldots, y_n^{(k+1)}$, le calcul de $y_i^{(k+1)}$ ne nécessitant que les valeurs des précédents $y_1^{(k+1)}, \ldots, y_{i-1}^{(k+1)}$.

Donnons une fonction Python recevant comme paramètres A, B, $Y^{(0)}$ et p et renvoyant $Y^{(p)}$:

```
def Y(A,B,Y0,p):
    n=len(A)
    DI=[1/A[i,i] for i in range(n)]
    Ytemp=Y0
    for k in range(p):
        for i in range(n):
            s=0
            for j in range(i):
                s+=A[i,j]*Ytemp[j]
            for j in range(i+1,n):
                s+=A[i,j]*Ytemp[j]
            Ytemp[i]=-DI[i]*(s-B[i])
    return Ytemp
```

Noter que les tableaux `numpy` sont indexés à partir de 0, ce qui est pris en compte dans le programme ci-dessus.

Noter aussi qu'un seul vecteur temporaire `Ytemp` suffit à stocker les coordonnées de $Y^{(k)}$ et de $Y^{(k+1)}$ au cours de la boucle `for i...` : je peux remplacer la i-ième composante de $Y^{(k)}$ par celle de $Y^{(k+1)}$ puisqu'elle ne sert plus par la suite.

Comme le calcul d'un inverse prend un peu de temps et que les $1/a_{i,i}$ resservent à chaque itération, il est conseillé de les calculer une fois pour toutes (dans la liste `DI`), même si cela occupe un peu de mémoire.

L'intérêt de ces méthodes itératives provient du temps de calcul de l'inverse d'une matrice (de l'ordre de n^3, prohibitif pour les grandes valeurs de n) alors que l'on peut en pratique se contenter d'une valeur approchée de la solution, obtenue ici au prix d'un nombre d'opérations de l'ordre de $p \cdot n^2$...

Hélas, cette remarque sur la complexité ne se vérifie pas expérimentalement avec Python, pour des valeurs de n de l'ordre de quelques centaines, où les boucles interprétées prennent beaucoup plus de temps que le calcul de l'inverse d'une matrice par `numpy.linalg.inv`, précompilé en C ! Mais lorsque n dépasse 10 000, ledit calcul de l'inverse commence à coûter vraiment cher, la complexité en n^3 apparaît clairement...

Problème B : puissances de matrices stochastiques

Partie 1

1) Le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A(X) = X^2 - \operatorname{Tr} A \cdot X + \det A = X^2 - \frac{5}{6}X - \frac{1}{6} = (X-1)\left(X+\frac{1}{6}\right).$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, χ_A est un polynôme annulateur de A ; déterminons donc le reste de la division euclidienne de X^n par χ_A ; il est de degré au plus 1, donc de la forme $a_nX + b_n$. En évaluant l'égalité

$$X^n = \chi_A(X) \times Q(X) + a_nX + b_n \tag{1}$$

en 1 et en $-\frac{1}{6}$, j'obtiens

$$\begin{cases} a_n + b_n &= 1 \\ -\frac{1}{6}a_n + b_n &= \left(-\frac{1}{6}\right)^n \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} a_n &= \frac{6}{7} - \frac{6}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n \\ b_n &= \frac{1}{7} + \frac{6}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n \end{cases}$$

et en remplaçant dans cette même égalité X par A, j'obtiens, compte tenu de $\chi_A(A) = 0$,

$$A^n = a_nA + b_nI_2$$

soit (comme quoi il n'est pas nécessaire de diagonaliser...)

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} + \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n & \frac{4}{7} - \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n \\ \frac{3}{7} - \frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n & \frac{4}{7} + \frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}.}$$

Il en résulte que

$$\boxed{(A^n) \text{ converge vers } A^\infty = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix} \text{ et } A^\infty \in \mathcal{S}_2.}$$

2) B étant triangulaire, les coefficients de la diagonale sont les valeurs propres : 1 est valeur propre simple (sous-espace propre $\operatorname{Vect} U_3$) et $\frac{1}{2}$ valeur propre double. Or il est clair que $B - \frac{1}{2}I_3$ est de rang 2, donc $E_{\frac{1}{2}}(B)$ est une droite : $1 + 1 < 3$, donc

$$\boxed{B \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

Notons $E = \mathbb{R}^3$ et $f = \operatorname{Can} B$; d'après la 1re colonne de B, $\operatorname{Ker}\left(f - \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right) = \operatorname{Vect}(1,0,0)$, tandis que $\operatorname{Ker}\left(f - \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)^2$ est le plan $\mathcal{P}$ d'équation $z = 0$. Je choisis alors (par exemple !) $e_3 = (0,1,0)$ qui est dans $\operatorname{Ker}\left(f - \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)^2 \setminus \operatorname{Ker}\left(f - \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)$ et je pose $e_2 = \left(f - \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)(e_3) = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$. Je constate alors (sans surprise !) que (e_2, e_3) est une base de $\mathcal{P}$; je la complète avec $e_1 = U_3$ qui n'est pas dans $\mathcal{P}$; par conséquent (e_1, e_2, e_3) est une base de E, qui vérifie

$$f(e_1) = e_1 \ ; \ f(e_2) = \frac{1}{2}e_2 \ ; \ f(e_3) = e_2 + \frac{1}{2}e_3.$$

Autrement dit

$$\boxed{P^{-1}BP = T \text{ avec } T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

J'ai classiquement : $\forall n \in \mathbb{N} \quad T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & \frac{n}{2^{n-1}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix}$ (grâce à la formule du binôme). Donc (T^n) converge vers $T^\infty = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Or, pour tout n, $B^n = PT^nP^{-1}$ d'où, par continuité de l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ (linéaire en dimension finie !), (B^n) converge vers $B^\infty = PT^\infty P^{-1}$. La première ligne de P^{-1} étant $(0\ 0\ 1)$ (cf. le système $PX' = X\ldots$), j'obtiens

$$\boxed{(B^n) \text{ converge vers } B^\infty = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B^\infty \in \mathcal{S}_3.}$$

Partie 2

1) Je pourrais bien sûr faire les calculs (bestiaux) à coup de coefficients... Mais je remarque plutôt que, étant donnée $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ et en notant U_r le vecteur colonne à r lignes dont toutes les composantes valent 1, le vecteur colonne AU_r est la somme des vecteurs colonnes de A. Il en résulte que A vérifie la condition (**ii**) si et seulement si $AU_r = U_r$. J'en déduis que $\mathcal{S}_r$ est stable par la multiplication : soient A et B dans $\mathcal{S}_r$.

- D'après la remarque précédente, $AU_r = U_r$ et $BU_r = U_r$, d'où
$$(AB)U_r = A(BU_r) = AU_r = U_r$$
donc AB vérifie la condition (**ii**).
- Comme tous les coefficients de A et de B sont dans $[0,1]$, les formules du produit matriciel montrent que les coefficients de AB sont positifs ou nuls (comme sommes de nombres positifs ou nuls). Or d'après le point précédent, la somme des coefficients de chaque ligne de AB vaut 1, par conséquent lesdits coefficients sont tous au plus égaux à 1. Ainsi AB vérifie également (**i**).

En conclusion, $AB \in \mathcal{S}_r$. Pour $\mathcal{S}_r^*$, il suffit d'ajouter qu'une somme de réels strictement positifs est strictement positive !

$$\boxed{\mathcal{S}_r \text{ et } \mathcal{S}_r^* \text{ sont stables par produit.}}$$

2) a) Utilisant la stabilité précédente, une récurrence sur n banale montre que

$$\boxed{A^n \text{ est une matrice stochastique.}}$$

b) Je reprends U_r, vecteur colonne dont toutes les composantes valent 1 ; j'ai déjà remarqué que, A étant dans $\mathcal{S}_r$, $AU_r = U_r$; comme U_r est non nul, c'est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1 :

$$\boxed{1 \text{ est valeur propre de } A.}$$

On peut aussi montrer que $\det(A - I) = 0$ en constatant que la somme des colonnes est nulle.

c) Supposons que (A^n) converge vers A^∞ ; d'après le **a)**, pour tout couple (i,j) de $\mathbb{N}_n$, la suite $\left(a_{i,j}^{(n)}\right)$ (avec les notations de l'énoncé) est une suite d'éléments de $[0,1]$, qui est un fermé de $\mathbb{R}$: donc sa limite $a_{i,j}^\infty$ est aussi dans $[0,1]$; ainsi, A^∞ vérifie la condition (**i**) ; on vérifie de même, par passage à la limite, que A^∞ vérifie la condition (**ii**). A^∞ est donc stochastique.

N.B. : la démonstration précédente prouve en fait que S_r est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, en vertu de la caractérisation séquentielle !

Par ailleurs, notons que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $A^nA = AA^n = A^{n+1}$. La suite (A^n) converge vers A^∞, donc la sous-suite $\left(A^{n+1}\right)$ converge également vers A^∞. De plus, par continuité de l'application (linéaire en dimension finie !) $M \mapsto MA$, (A^nA) converge vers $A^\infty A$; de même, (AA^n) converge vers AA^∞. En conclusion, par unicité de la limite,

$$\boxed{A^\infty \in \mathcal{S}_r \text{ et } A^\infty A = AA^\infty = A^\infty.}$$

3) Le lecteur averti aura reconnu le théorème d'HADAMARD... Je suppose $M = (m_{i,j})$ non inversible ; $\operatorname{Can} M$ n'est donc pas injectif : je dispose d'un vecteur colonne X non nul tel que $MX = 0$.

Je fixe i dans $\mathbb{N}_n$ tel que $|x_i| = \max\limits_{1\leq h\leq r} |x_h|$ (i existe bien puisqu'il s'agit d'un plus grand élément).

La i-ième composante de $MX = 0$ me donne :

$$\sum_{j=1}^{r} m_{i,j}x_j = 0 \tag{2}$$

or x_i non nul (puisque $X \neq 0$), d'où, grâce à l'inégalité triangulaire,

$$|m_{i,i}| = \frac{1}{|x_i|}\left|\sum_{j\neq i} m_{i,j}x_j\right| \leq \sum_{j\neq i} |m_{i,j}|\,\frac{|y_j|}{|y_i|} \leq \sum_{j\neq i} |m_{i,j}|$$

par définition de i, ce qui contredit le fait que M soit à diagonale strictement dominante.

$$\boxed{M \text{ est inversible.}}$$

4) a) Par construction, j'ai : $\forall i \in \mathbb{N}_r \quad c_{i,i} = a_{i,i} - 1 \quad$ et $\quad \forall (i,j) \in \mathbb{N}_r^2 \quad c_{i,j} = a_{i,j}$.

Fixons alors i dans $\mathbb{N}_{r-1}$; comme $A \in \mathcal{S}_r^*$, $a_{i,i} \in\,]0,1[$ et $a_{i,r} > 0$, donc

$$|c_{i,i}| = 1 - a_{i,i} = \sum_{\substack{1\leq j\leq r\\ j\neq i}} a_{i,j} = a_{i,r} + \sum_{\substack{1\leq j\leq r-1\\ j\neq i}} a_{i,j} > \sum_{\substack{1\leq j\leq r-1\\ j\neq i}} c_{i,j}$$

c'est-à-dire que

$$\boxed{C \text{ est une matrice à diagonale strictement dominante.}}$$

b) D'après **3)**, C est inversible ; donc les $r-1$ vecteurs colonnes de C forment une famille libre ; il en résulte que les $r-1$ premiers vecteurs colonnes de $A - I_r$ forment également une famille libre (considérer une combinaison linéaire nulle...). Par conséquent $\operatorname{rg}(A - I_r) \geq r-1$; or, 1 étant valeur propre de A, je sais aussi que $\operatorname{rg}(A - I_r) < r$. Finalement $\operatorname{rg}(A - I_r) = r - 1$ et donc, grâce au théorème du rang,

$$\boxed{\text{L'espace propre de } A \text{ associé à la valeur propre 1 est de dimension 1.}}$$

c) Soit $\lambda \in \operatorname{Sp}_{\mathbb{C}} A$: $A - \lambda I_r$ n'est pas inversible ; d'après **3)**, je dispose de i dans $\mathbb{N}_r$ tel que

$$|a_{i,i} - \lambda| \leq \sum_{j\neq i} |a_{i,j}| = 1 - a_{i,i} \text{ (car } A \in \mathcal{S}_r\text{)}.$$

J'en déduis

$$|\lambda| = |\lambda - a_{i,i} + a_{i,i}| \leq |\lambda - a_{i,i}| + a_{i,i} \leq 1 - a_{i,i} + a_{i,i} = 1\ ;$$

en outre, si $|\lambda| = 1$, c'est que ces inégalités sont des égalités : d'une part $\lambda - a_{i,i}$ et $a_{i,i}$ sont sur une même demi-droite du plan réel $\mathbb{C}$ (cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire pour la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{C}$ considéré comme plan euclidien), donc $\lambda - a_{i,i}$ est dans $\mathbb{R}^+$; d'autre part $|\lambda - a_{i,i}| = 1 - a_{i,i}$; il en résulte que $\lambda - a_{i,i} = 1 - a_{i,i}$, d'où $\lambda = 1$. Par contraposition, si $\lambda \neq 1$, alors $|\lambda| < 1$.

$$\boxed{\text{Si } \lambda \text{ est une valeur propre complexe de } A, \text{ soit } \lambda = 1, \text{ soit } |\lambda| < 1.}$$

5) Le début de la démonstration précédente reste valable pour $A \in \mathcal{S}_r$:

$$\boxed{\text{Les valeurs propres complexes de } A \text{ sont toutes de module inférieur ou égal à 1.}}$$

Or le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{C}$, donc $\det A$ est le produit des valeurs propres (complexes) de A. Par conséquent

$$\boxed{|\det A| \leq 1.}$$

6) a) A est stochastique stricte, donc les $a_{i,j}$ sont un nombre fini de valeurs strictement positives : leur plus petit élément α existe et vérifie $\alpha > 0$. Il est clair alors que $\varepsilon = \min\left(\alpha, \dfrac{1}{4}\right)$ vérifie :

$$\boxed{\varepsilon \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\text{ et } \forall\,(i,j) \in \mathbb{N}_r^2 \quad a_{i,j} \geq \varepsilon.}$$

b) $A^{n+1} = A \times A^n$ donc, par définition du produit matriciel,

$$\boxed{\forall\,(i,j) \in \mathbb{N}_r^2 \quad a_{i,j}^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{r} a_{i,k} a_{k,j}^{(n)}.}$$

c) Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ et $(i,j) \in \mathbb{N}_r^2$; j'écris, compte tenu de $\sum\limits_{k=1}^{r} a_{i,k} = 1$:

$$a_{i,j}^{(n+1)} - \alpha_j^{(n)} = \sum_{k=1}^{r} a_{i,k}\left(a_{k,j}^{(n)} - \alpha_j^{(n)}\right)$$

d'où, par définition de ε, puisque $a_{k,j}^{(n)} - \alpha_j^{(n)} \geq 0$

$$a_{i,j}^{(n+1)} - \alpha_j^{(n)} \geq \varepsilon \sum_{k=1}^{r} \left(a_{k,j}^{(n)} - \alpha_j^{(n)}\right).$$

Cette dernière somme ne comporte que des termes positifs, elle est donc au moins égale à chacun d'entre eux ; or le plus grand élément $\beta_j^{(n)}$ est atteint pour au moins une valeur de k, d'où

$$a_{i,j}^{(n+1)} - \alpha_j^{(n)} \geq \varepsilon\left(\beta_j^{(n)} - \alpha_j^{(n)}\right) = \varepsilon\gamma_j^{(n)}$$

De même :

$$\beta_j^{(n)} - a_{i,j}^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{r} a_{i,k}\left(\beta_j^{(n)} - a_{k,j}^{(n)}\right) \geq \varepsilon \sum_{k=1}^{r} \left(\beta_j^{(n)} - a_{k,j}^{(n)}\right)$$

d'où :

$$\beta_j^{(n)} - a_{i,j}^{(n+1)} \geq \varepsilon\left(\beta_j^{(n)} - \alpha_j^{(n)}\right) = \varepsilon\gamma_j^{(n)},$$

soit finalement

$$\boxed{a_{i,j}^{(n+1)} - \alpha_j^{(n)} \geq \varepsilon\gamma_j^{(n)} \quad \text{et} \quad \beta_j^{(n)} - a_{i,j}^{(n+1)} \geq \varepsilon\gamma_j^{(n)}.}$$

d) Mais $\alpha_j^{(n+1)}$ est l'un des $a_{i,j}^{(n+1)}$; d'après la première inégalité ci-dessus, j'ai donc

$$\alpha_j^{(n+1)} - \alpha_j^{(n)} \geq \varepsilon\gamma_j^{(n)}.$$

Les $\gamma_j^{(n)}$ étant positifs ou nuls, j'ai *a fortiori* :

$$\alpha_j^{(n+1)} \geq \alpha_j^{(n)}.$$

Un raisonnement similaire fournirait :

$$\beta_j^{(n)} - \beta_j^{(n+1)} \geq \varepsilon\gamma_j^{(n)} \quad \text{et} \quad \beta_j^{(n+1)} \leq \beta_j^{(n)}.$$

De plus, $\alpha_j^{(n+1)}$ et $\beta_j^{(n+1)}$ étant respectivement le plus petit et le plus grand élément d'un même ensemble, j'ai bien sûr :

$$\forall j \in \mathbb{N}_r \quad \alpha_j^{(n+1)} \leq \beta_j^{(n+1)}.$$

En conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall j \in \mathbb{N}_r \quad \alpha_j^{(n)} \leq \alpha_j^{(n+1)} \leq \beta_j^{(n+1)} \leq \beta_j^{(n)}.}$$

Enfin, en additionnant membre à membre les deux inégalités établies ci-dessus,

$$\alpha_j^{(n+1)} - \alpha_j^{(n)} + \beta_j^{(n)} - \beta_j^{(n+1)} \geq 2\varepsilon\gamma_j^{(n)}$$

soit

$$\gamma_j^{(n)} - \gamma_j^{(n+1)} \geq 2\varepsilon\gamma_j^{(n)},$$

d'où finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall j \in \mathbb{N}_r \quad \gamma_j^{(n+1)} \leq (1-2\varepsilon)\,\gamma_j^{(n)}.}$$

e) Ainsi, pour tout j fixé dans $\mathbb{N}_r$, la suite à termes positifs $\left(\gamma_j^{(n)}\right)_{n\geq 1}$ est majorée par une suite géométrique de raison $1-2\varepsilon \in \,]0,1[$ (récurrence immédiate) : elle converge donc vers 0. Grâce au **d)**, j'en conclus que les suites $\left(\alpha_j^{(n)}\right)_{n\geq 1}$ et $\left(\beta_j^{(n)}\right)_{n\geq 1}$ sont adjacentes : soit donc ℓ_j leur limite commune. J'ai par construction :

$$\forall i \in \mathbb{N}_r \quad \alpha_j^{(n)} \leq a_{i,j}^{(n)} \leq \beta_j^{(n)},$$

donc, d'après le théorème d'encadrement, la suite $\left(a_{i,j}^{(n)}\right)_{n\geq 1}$ converge vers ℓ_j. Cela étant prouvé pour tout couple (i,j) fixé dans $\mathbb{N}_r^2$, j'en conclus que la suite (A^n) converge dans $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ vers la matrice $A^\infty = \left(a_{i,j}^\infty\right)$ définie par :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}_r^2 \quad a_{i,j}^\infty = \ell_j.$$

f) Comme ℓ_j ne dépend pas de i, cette matrice a toutes ses lignes identiques :

$$\boxed{\left(A^k\right) \text{ converge dans } \mathcal{M}_r(\mathbb{R}) \text{ vers une matrice } A^\infty \text{ dont toutes les lignes sont identiques.}}$$

7) a) Notons que $A \in \mathcal{S}_3^*$; je sais donc déjà que 1 est valeur propre, or (ce type de matrice est classique !) je remarque que $A+\dfrac{1}{5}I_3$ est de rang 1. Donc $-\dfrac{1}{5}$ est valeur propre et le sous-espace propre associé est un plan. Il n'y a donc pas d'autre valeur propre (les sous-espaces propres étant en somme directe !)

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } A \text{ sont 1 (simple, donc } E_1(A) \text{ est une droite) et } -\frac{1}{5}, \text{ de module} < 1.}$$

b) D'après les résultats précédents, $\left(A^n\right)$ converge vers une matrice A^∞, stochastique et dont toutes les lignes sont identiques. Remarquant (habilement) que A est symétrique, j'en déduis par unicité de la limite que A^∞ est également symétrique. En effet $\left({}^tA^n\right)$ converge vers ${}^tA^\infty$, par continuité de l'application linéaire $M \mapsto {}^tM$. Finalement A^∞ a ses lignes et ses colonnes identiques, elle est donc remplie avec une seule et même valeur qui est nécessairement $\dfrac{1}{3}$ puisque A^∞ est stochastique ! Ainsi, avec un minimum de calculs…

$$\boxed{A^\infty = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.}$$