D.S. 3 *(4 heures)*

Problème A : méthodes itératives

On rappelle et l'on admet que, dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), l'application qui à tout X de $\mathbb{R}^n$, $X = (x_1, \ldots, x_n)$, associe le réel $\|X\| = \max\limits_{1 \le i \le n} |x_i|$ définit une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Pour l'écriture des fonctions Python, on supposera le module `numpy` chargé par `import numpy as np`. On rappelle alors que, si `A` désigne un tableau `numpy` à deux dimensions, `len(A)` renvoie le nombre de lignes de `A` et `A[i]` renvoie la ligne numéro `i` de `A`, sous la forme d'un tableau `numpy` à une dimension. Cela bien sûr à condition que `i` soit un numéro de ligne existant dans `A` !

Alors `A[i][j]` renvoie l'élément de la colonne `j` dans la ligne `i` ; cet élément peut aussi être obtenu directement par `A[i,j]`.

Attention ! Dans les tableaux `numpy`, les lignes et les colonnes sont numérotées à partir de 0. C'est pourquoi, si $A = [a_{i,j}]_{1 \le i,j \le n}$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on stockera A dans un tableau `numpy` `A` tel que `A[i,j]` contienne $a_{i-1,j-1}$, pour tout (i,j) de $\{1, \ldots, n\}^2$.

Questions préliminaires

1) Montrer que l'application qui à toute matrice $A = [a_{i,j}]_{1 \le i,j \le n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe le réel $\|\!|A|\!\| = \max\limits_{1 \le i \le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$ définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Écrire une fonction Python recevant un tableau carré `numpy` de réels représentant une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et renvoyant $\|\!|A|\!\|$.

2) Établir : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \forall X \in \mathbb{R}^n \quad \|MX\| \le \|\!|M|\!\| \cdot \|X\|$.

Dans toute la suite, $A = [a_{i,j}]_{1 \le i,j \le n}$ désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *à diagonale strictement dominante*, c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} |a_{i,j}|\,.$$

On désigne par D, E, F les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définies par :

$$\begin{aligned}
D &= [d_{i,j}]_{1 \le i,j \le n} \quad \text{où} \quad d_{i,i} = a_{i,i} \quad \text{et} \quad d_{i,j} = 0 \text{ si } i \ne j\,,\\
E &= [e_{i,j}]_{1 \le i,j \le n} \quad \text{où} \quad e_{i,j} = -a_{i,j} \text{ si } i > j \quad \text{et} \quad e_{i,j} = 0 \text{ si } i \le j\,,\\
F &= [f_{i,j}]_{1 \le i,j \le n} \quad \text{où} \quad f_{i,j} = -a_{i,j} \text{ si } i < j \quad \text{et} \quad f_{i,j} = 0 \text{ si } i \ge j\,,
\end{aligned}$$

de sorte que l'on a : $A = D - E - F$.

Les parties **1** *et* **2** *sont indépendantes.*

Partie 1 – *Méthode de Jacobi*

1) a) Justifier l'existence de la matrice J définie par : $J = D^{-1}(E + F)$.

b) Montrer que : $\|\!|J|\!\| < 1$.

2) a) Soit $Y \in \mathbb{R}^n$. Établir l'équivalence : $AY = 0 \Leftrightarrow Y = JY$.

b) En déduire que A est inversible *(théorème d'Hadamard)*.

3) $B \in \mathbb{R}^n$ désignant un vecteur fixé, on appelle Λ l'unique solution du système $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathbb{R}^n$. On considère la suite $\left(X^{(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ définie par

$$X^{(0)} \in \mathbb{R}^n \quad et \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad X^{(k+1)} = JX^{(k)} + D^{-1}B\,.$$

Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N} \quad X^{(k+1)} - \Lambda = J\left(X^{(k)} - \Lambda\right)$.

En conclure que la suite $\left(X^{(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers Λ.

Partie 2 – *Méthode de Gauss-Seidel*

1) Justifier l'existence de la matrice L définie par : $L = (D - E)^{-1} F$.

2) Soit $X \in \mathbb{R}^n$, $X \neq 0$ et $Y = LX$. On pose $X = (x_1, \ldots, x_n)$ et $Y = (y_1, \ldots, y_n)$.

a) Montrer que :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad y_i = -\frac{1}{a_{i,i}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} y_j + \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} x_j \right),$$

où la première (*resp.* deuxième) somme est égale à 0 lorsque $i = 1$ (*resp.* $i = n$).

b) Vérifier que

$$|y_1| < \|X\| .$$

En déduire que

$$\|Y\| < \|X\| .$$

3) On pose $L = [\alpha_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$.

a) Justifier qu'il existe i_0 dans $\{1, \ldots, n\}$ tel que $|||L||| = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{i_0,j}|$.

b) On considère le vecteur $X_0 = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ où :

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\} \quad \varepsilon_j = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha_{i_0,j} \geq 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Montrer que

$$\|LX_0\| = |||L||| .$$

c) En déduire que :

$$|||L||| < 1.$$

4) $B \in \mathbb{R}^n$ désignant un vecteur fixé, on appelle Λ l'unique solution du système $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathbb{R}^n$. On considère la suite $\left(Y^{(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ définie par

$$Y^{(0)} \in \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad Y^{(k+1)} = LY^{(k)} + (D - E)^{-1} B.$$

a) Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad Y^{(k+1)} - \Lambda = L\left(Y^{(k)} - \Lambda\right).$$

b) En conclure que la suite $\left(Y^{(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers Λ.

c) En s'inspirant du **2)a)**, proposer un algorithme permettant de calculer les composantes de $Y^{(k+1)}$ à partir de celles de $Y^{(k)}$ *(sans inversion de matrice et sans utiliser les coordonnées de Λ, que l'on cherche à approcher !).*

Écrire une fonction Python recevant pour paramètres trois tableaux `numpy` représentant A, B et $Y^{(0)}$ ainsi qu'un entier naturel p et renvoyant $Y^{(p)}$, calculé suivant l'algorithme précédent.

Problème B : puissances de matrices stochastiques

Définitions et notations

On désigne par r un entier naturel supérieur ou égal à 2 et par $\mathbb{N}_r$ l'ensemble $\{1, 2, \ldots, r\}$.
On désigne par $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre r à coefficients réels.
On note I_r la matrice identité d'ordre r.
Une matrice $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ est dite *à diagonale strictement dominante* si, et seulement si,

$$\forall i \in \mathbb{N}_r \quad |m_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |m_{i,j}| .$$

Une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ est dite *stochastique* lorsqu'elle vérifie les deux conditions suivantes :

$$\textbf{(i)} \quad \forall (i,j) \in \mathbb{N}_r^2 \quad a_{i,j} \in [0,1] ;$$

$$\textbf{(ii)} \quad \forall i \in \mathbb{N}_r \quad \sum_{j=1}^{r} a_{i,j} = 1.$$

Elle est dite *stochastique stricte* si, de plus, ses coefficients sont tous non nuls.

On note $\mathcal{S}_r$ l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_r^*$ l'ensemble des matrices stochastiques strictes.
Soit $A = (a_{i,j})$ un élément de $\mathcal{S}_r$, on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \; A^{n+1} = A^n \times A \quad \text{et} \quad A^n = \left(a_{i,j}^{(n)}\right)$$

On a donc $a_{i,j}^{(1)} = a_{i,j}$.
Si, pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}_r^2$, la suite de terme général $a_{i,j}^{(n)}$ a une limite finie $a_{i,j}^{\infty}$ quand n tend vers l'infini, on dit que la suite de terme général A^n a une limite finie quand n tend vers l'infini et l'on note :

$$\lim_{n\to\infty} A^n = A^{\infty} = \left(a_{i,j}^{\infty}\right) .$$

Partie 1

1) On pose $A = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. Déterminer l'expression de la matrice A^n en fonction de n. Montrer que A^n admet une limite A^{∞} que l'on déterminera quand n tend vers l'infini et que A^{∞} est élément de $\mathcal{S}_2$.

2) On pose $B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. B est-elle diagonalisable ?

Déterminer une matrice inversible P telle que : $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

En déduire que B^n admet une limite B^{∞} que l'on déterminera quand n tend vers l'infini et que B^{∞} est élément de $\mathcal{S}_3$.

Partie 2

1) Montrer que $\mathcal{S}_r$ et $\mathcal{S}_r^*$ sont stables par produit.

2) Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{S}_r$ et n un entier strictement positif.

a) Justifier que A^n est une matrice stochastique.

b) Montrer, sans calculer le polynôme caractéristique de la matrice A, que 1 est une valeur propre de cette matrice.

c) On suppose que A^{∞} existe. Montrer que A^{∞} est une matrice stochastique et que l'on a :

$$A^{\infty}A = AA^{\infty} = A^{\infty}.$$

3) Montrer que toute matrice M à diagonale strictement dominante est inversible *(on pourra procéder par l'absurde et utiliser un vecteur colonne X non nul tel que $MX = 0$).*

4) Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{S}_r^*$.

a) On pose $B = A - I_r$. On supprime la dernière ligne et la dernière colonne de B ; la matrice carrée d'ordre $r-1$ obtenue est notée C. Vérifier que C est une matrice à diagonale strictement dominante.

b) En déduire que l'espace propre de A associé à la valeur propre 1 est de dimension 1.

c) Montrer que toute valeur propre complexe de A est soit égale à 1, soit de module strictement inférieur à 1.

5) Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{S}_r$. Montrer que les valeurs propres complexes de A sont toutes de module inférieur ou égal à 1. En déduire que $|\det A| \leq 1$.

6) Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{S}_r^*$. Pour tout $j \in \mathbb{N}_r$ et tout entier strictement positif n, on pose :

$$\alpha_j^{(n)} = \min_{i \in \mathbb{N}_r} a_{i,j}^{(n)} \quad ; \quad \beta_j^{(n)} = \max_{i \in \mathbb{N}_r} a_{i,j}^{(n)} \quad ; \quad \gamma_j^{(n)} = \beta_j^{(n)} - \alpha_j^{(n)}.$$

a) Justifier l'existence d'un réel $\varepsilon \in]0, 1/2[$ tel que : $\forall (i,j) \in \mathbb{N}_r^2 \quad a_{i,j} \geq \varepsilon$.

b) Exprimer $a_{i,j}^{(n+1)}$ en fonction de $a_{i,1}$, $a_{i,2}, \ldots$, $a_{i,n}$ et des coefficients de A^n.

c) Montrer que, pour tout couple $(i,j) \in \mathbb{N}_r^2$ et tout entier strictement positif n, on a :

$$a_{i,j}^{(n+1)} - \alpha_j^{(n)} \geq \varepsilon \gamma_j^{(n)} \quad \text{et} \quad \beta_j^{(n)} - a_{i,j}^{(n+1)} \geq \varepsilon \gamma_j^{(n)}.$$

d) En déduire que, pour tout entier $j \in \mathbb{N}_r$ et tout entier strictement positif n, on a :

$$\alpha_j^{(n)} \leq \alpha_j^{(n+1)} \leq \beta_j^{(n+1)} \leq \beta_j^{(n)} \quad \text{et} \quad \gamma_j^{(n+1)} \leq \gamma_j^{(n)} (1 - 2\varepsilon)$$

e) Montrer que A^n a une limite finie A^∞ quand n tend vers l'infini.

f) Comparer les lignes de A^∞.

7) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer les valeurs propres de A et vérifier qu'elles satisfont aux résultats du **4)**.

b) Montrer que A^n admet une limite finie A^∞, que l'on déterminera.

Il ne faut jamais hésiter à refaire plusieurs fois un calcul.

Si le résultat change à chaque fois, c'est que vous avez commis toute une série d'erreurs successives. En général, à chaque itération vous parviendrez à identifier la faute commise au calcul précédent.

Si au contraire vous trouvez toujours la même chose, c'est que vous faites une fixation sur une seule erreur, indétectable celle-là.