Problème A : théorème de d'Alembert

1) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n impaire et $f \in \mathcal{L}(E)$; le polynôme caractéristique est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair, il admet donc au moins une racine dans $\mathbb{R}$ (cf. le théorème des valeurs intermédiaires) qui est une valeur propre de f. En conclusion :

$$\boxed{\mathcal{P}(n,\mathbb{R}) \text{ est vraie pour tout } n \text{ impair.}}$$

2) a) Si $f = \lambda.\mathrm{Id}_E$, tout vecteur non nul de E est vecteur propre de f. Or d'après $\mathcal{P}(n,\mathbb{R})$, je dispose d'un vecteur propre de g, qui est donc commun à f et g.

$$\boxed{\text{Si } f = \lambda.\mathrm{Id}_E,\ f \text{ et } g \text{ admettent au moins un vecteur propre commun.}}$$

Supposons maintenant $f \neq \lambda.\mathrm{Id}_E$. Comme f et g commutent par hypothèse, g commute également avec $f - \lambda.\mathrm{I}_E$ et donc $\mathrm{Ker}(f-\lambda.\mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Im}(f-\lambda.\mathrm{Id}_E)$ sont stables par g. De plus, $\mathrm{Ker}(f-\lambda.\mathrm{Id}_E)$ n'est pas égal à E (puisque $f \neq \lambda.\mathrm{Id}_E$), ni à $\{0\}$ (puisque λ est valeur propre de f par hypothèse). Donc $\mathrm{Im}(f-\lambda.\mathrm{Id}_E)$ ne peut être égal à E en vertu du théorème du rang. Ainsi,

$$\boxed{\text{Si } f \neq \lambda\mathrm{Id}_E,\ \mathrm{Ker}(f-\lambda\mathrm{Id}_E) \text{ et } \mathrm{Im}(f-\lambda\mathrm{Id}_E) \text{ sont deux sous-espaces vectoriels stricts de } E, \text{ stables par } g.}$$

b) Soit, pour $p \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}(p)$ le prédicat : "$\mathcal{Q}(2q+1,\mathbb{R})$ est vraie pour tout $q \in [\![0,p]\!]$". Je montre par récurrence sur p que $\mathcal{A}(p)$ est vraie pour tout p :

* $\mathcal{A}(0)$ est vraie, puisque $\mathcal{Q}(1,\mathbb{R})$ l'est : dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension 1, tout vecteur non nul est vecteur propre commun à tous les endomorphismes de E !
* <u>*hypothèse de récurrence*</u> : supposons $p \geq 1$ tel que $\mathcal{A}(p-1)$ soit vraie.
* Pour montrer que $\mathcal{A}(p)$ est vraie, il s'agit de prouver $\mathcal{Q}(2p+1,\mathbb{R})$. Soient donc E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $2p+1$ et f, g deux endomorphismes de E qui commutent. D'après **1)**, je dispose d'une valeur propre λ de f. Si $f = \lambda.\mathrm{Id}_E$, j'ai vu au **a)** que f et g admettent un vecteur propre commun. Sinon, toujours d'après **a)**, je dispose d'un sous-espace strict F de E, stable par f et g et de dimension impaire (en effet, l'un des deux sous-espaces $\mathrm{Ker}(f-\lambda.\mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Im}(f-\lambda.\mathrm{Id}_E)$ est nécessairement de dimension impaire, puisque la somme de leurs dimensions est impaire : c'est $\dim E$ d'après le théorème du rang !). Alors $\dim F = 2q+1$ avec $q \in [\![0,p-1]\!]$ et f, g induisent deux endomorphismes de F qui commutent. L'hypothèse de récurrence me fournit alors un vecteur de F, vecteur propre commun à ces deux endomorphismes induits, qui est *a fortiori* un vecteur de E, vecteur propre commun à f et g. Ainsi $\mathcal{Q}(2p+1,\mathbb{R})$ est vraie, ce qui achève la preuve par récurrence.

$$\boxed{\mathcal{Q}(n,\mathbb{R}) \text{ est vraie pour tout } n \text{ entier naturel impair.}}$$

3) a) Considérons ici $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. H n'est autre que le noyau de l'application $B \mapsto {}^tB - \overline{B}$, qui est clairement $\mathbb{R}$-linéaire (mais elle n'est pas $\mathbb{C}$-linéaire...). Par conséquent H est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. J'écris $B = X + \mathbf{i}.Y$, avec X et Y dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} B \in H \quad &\Leftrightarrow \quad {}^tX + \mathbf{i}.{}^tY = X - \mathbf{i}.Y \\ &\Leftrightarrow \quad \left({}^tX = X \quad \text{et} \quad {}^tY = -Y\right) \end{aligned}$$

Ainsi, H apparaît comme étant $\mathrm{Im}\,\Phi$, où Φ est l'application de $\mathcal{S} \times \mathcal{A}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui à (X,Y) associe $X + \mathbf{i}.Y$, $\mathcal{S}$ (*resp.* $\mathcal{A}$) étant le sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques (*resp.* antisymétriques). Φ étant clairement linéaire et injective, il en résulte que $H = \mathrm{Im}\,\Phi$ est de même dimension que $\mathcal{S} \times \mathcal{A}$; or, classiquement,

$$\dim \mathcal{S} = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \dim \mathcal{A} = \frac{n(n-1)}{2}$$

d'où :

$$\dim H = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2.$$

En conclusion :

$$\boxed{H \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel de dimension } n^2.}$$

b) Soit $B \in H$:

$$\begin{aligned} {}^t\left(u\left(B\right)\right) &= \frac{1}{2}\left({}^tB \times {}^tA + \overline{A} \times {}^tB\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\overline{B} \times {}^tA + \overline{A} \times \overline{B}\right) \quad \text{car } B \in H \\ &= \overline{u\left(B\right)} \end{aligned}$$

Autrement dit, $u(B) \in H$. On vérifie de même que $v(B) \in H$. De plus, u et v sont clairement $\mathbb{R}$-linéaires et on vérifie que :

$$u \circ v\left(B\right) = v \circ u\left(B\right) = \frac{1}{4\mathbf{i}}\left(A^2B - B^t\overline{A}^2\right).$$

$$\boxed{u \text{ et } v \text{ sont deux endomorphismes de } H \text{ tels que } u \circ v = v \circ u.}$$

c) n étant impair, n^2 l'est également et donc $\mathcal{Q}\left(n^2, \mathbb{R}\right)$ est vraie, d'après **2)**. L'appliquant dans H, je dispose d'une matrice non nulle B de H, vecteur propre commun à u et v, associé à des valeurs propres réelles x, y ; ainsi : $u(B) = x.B$ et $v(B) = y.B$. Or, par construction, $u(B) + \mathbf{i}v(B) = A \times B$ et donc

$$\boxed{AB = \left(x + \mathbf{i}.y\right).B.}$$

d) Observant le principe de calcul de AB, je constate que chaque vecteur colonne Z de B vérifie : $AZ = (x + \mathbf{i}.y).Z$. Or la matrice B est non nulle, l'un au moins de ses vecteurs colonnes est non nul, il est alors vecteur propre de A associé à la valeur propre $x + \mathbf{i}.y$. J'ai ainsi obtenu l'existence d'une valeur propre de A, donc de f cela pour tout endomorphisme f de E. En conclusion :

$$\boxed{\mathcal{P}\left(n, \mathbb{C}\right) \text{ est vraie, cela pour tout entier naturel } n \text{ impair.}}$$

4) a) On vient de montrer que $\mathcal{P}(p, \mathbb{C})$ est vrai, pour tout entier naturel p impair ; on en déduit que $\mathcal{Q}(p, \mathbb{C})$ est également vrai, en recopiant la démonstration du **2)**, en remplaçant $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$. Par conséquent,

$$\boxed{\mathcal{R}\left(0\right) \text{ est vraie.}}$$

b) Considérons le matériel fourni par l'énoncé.

(i) Il est classique que L, ensemble des matrices antisymétriques, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de dimension :

$$\frac{n\left(n-1\right)}{2} = \frac{2^kp\left(2^kp - 1\right)}{2} = 2^{k-1}q \quad \text{où} \quad q = p\left(2^kp - 1\right).$$

q est bien impair, car produit de deux entiers impairs, ainsi :

$$\boxed{L \text{ est un } \mathbb{C}\text{-espace vectoriel de dimension } 2^{k-1}q,\ q \text{ impair.}}$$

(ii) Soit $B \in L$:

$$\begin{aligned} {}^t\left(u\left(B\right)\right) &= {}^tB \times {}^tA + A \times {}^tB \\ &= -B \times {}^tA - A \times B \quad \text{car } B \in L \\ &= -u\left(B\right) \end{aligned}$$

Autrement dit, $u(B) \in L$. On vérifie de même que $v(B) \in L$. De plus, u et v sont clairement $\mathbb{C}$-linéaires et on vérifie que :

$$u \circ v\left(B\right) = v \circ u\left(B\right) = A^2B^tA + AB^tA^2.$$

$$\boxed{u \text{ et } v \text{ sont deux endomorphismes de } L \text{ tels que } u \circ v = v \circ u.}$$

(iii) D'après $\mathcal{R}(k-1)$, appliqué à L, je dispose d'une matrice non nulle B de L, vecteur propre commun à u et v, associé à des valeurs propres complexes x, y ; ainsi :

$$u\left(B\right) = x.B \quad et \quad v\left(B\right) = y.B,$$

d'où

$$y.B = A \times B \times {}^tA = A \times \left(x.B - AB\right)$$

soit

$$\boxed{\left(A^2 - x.A + y.I_n\right) \times B = 0.}$$

(iv) Je sais (cf. le second résultat admis en début de problème) que le polynôme $X^2 - x.X + y$ se factorise dans $\mathbb{C}[X]$, sous la forme $(X-a)(X-b)$, avec a, b complexes.

J'ai alors (comme au **3)d)**) pour tout vecteur colonne Z de B :

$$(A - a.I_n)(A - b.I_n) Z = 0.$$

Je considère alors un vecteur colonne non nul Z de B (il en existe, puisque $B \neq 0$). De deux choses l'une : soit $Z_1 = (A - b.I_n) Z$ est nul, auquel cas Z est vecteur propre de A associé à la valeur propre b, soit Z_1 est non nul, auquel cas Z_1 est vecteur propre de A associé à la valeur propre a (puisque $(A - a.I_n) Z_1 = 0$!). J'ai donc obtenu dans tous les cas une valeur propre de A, donc de f, cela pour tout endomorphisme f de E. Autrement dit :

$$\boxed{\mathcal{P}\left(2^k p, \mathbb{C}\right) \text{ est vraie.}}$$

(v) Reprenons l'idée et les notations du **2)** : λ est valeur propre de f et $f \neq \lambda.\mathrm{I}_E$ (sinon le résultat est banal), donc $F = \operatorname{Ker}(f - \lambda.\mathrm{I}_E)$ et $G = \operatorname{Im}(f - \lambda.\mathrm{I}_E)$ sont deux sous-espaces stricts de E, stables par f et g, et la somme de leurs dimensions est $n = 2^k p$. Deux cas se présentent :

- l'une de ces deux dimensions est de la forme $2^\ell q$ avec $\ell \in [\![0, k-1]\!]$ et q impair ; alors $\mathcal{R}(k-1)$ permet de conclure, en fournissant un vecteur propre commun aux deux endomorphismes induits ;
- ces deux dimensions sont de la forme $2^k q$ et $2^k r$ avec $q + r = p$; alors nécessairement q ou r est impair (puisque p l'est) et strictement inférieur à p. Appelons p_1 celui qui est impair et E_1 le sous-espace (F ou G) correspondant, qui est de dimension $2^k p_1$. On peut réitérer le raisonnement : à chaque étape, soit on peut conclure à l'aide de $\mathcal{R}(k-1)$, soit on se ramène à un sous-espace de dimension $2^k p_j$, où (p_j) est une suite strictement décroissante d'entiers impairs. Au pire (c'est-à-dire si $\mathcal{R}(k-1)$ n'a jamais permis de conclure), on se retrouvera après un nombre fini d'étapes dans un sous-espace de dimension 2^k et une dernière itération permettra alors nécessairement d'utiliser $\mathcal{R}(k-1)$!!

Dans tous les cas, j'aurai pu exhiber un vecteur propre commun à f et g :

$$\boxed{\mathcal{Q}\left(2^k p, \mathbb{C}\right) \text{ est vraie.}}$$

c) On vient de montrer par récurrence que :

$$\boxed{\mathcal{R}(k) \text{ est vraie pour tout } k.}$$

5) Tout entier naturel n non nul s'écrit sous la forme $2^k p$ avec $k \in \mathbb{N}$ et p impair. Alors $\mathcal{R}(k)$ permet de conclure :

$$\boxed{\mathcal{P}(n, \mathbb{C}) \text{ et } \mathcal{Q}(n, \mathbb{C}) \text{ sont vraies pour tout entier naturel non nul } n.}$$

6) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$; il s'agit de calculer le déterminant suivant :

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & \lambda & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & a_{n-1} + \lambda \end{vmatrix}.$$

J'effectue (habilement) l'opération suivante sur les lignes : $L_1 \leftarrow L_1 + \sum_{i=2}^{n} \lambda^{i-1}.L_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda^{i-1}.L_i$, qui ne modifie pas la valeur du déterminant, puisque j'ajoute à une ligne une combinaison linéaire des autres. Suite à cette opération, pour tout j dans $[\![1, n-1]\!]$, la valeur située sur L_1 dans la colonne j (qui ne comportait que deux termes non nuls, λ en ligne j et -1 en ligne $j+1$) vaut :

$$\lambda^{j-1}.\lambda + \lambda^j.(-1) = 0$$

et la valeur située sur L_1 en colonne n vaut :

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda^{i-1}.a_{i-1} + \lambda^{n-1}.(a_{n-1} + \lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k + \lambda^n = P(\lambda) \quad \text{où} \quad P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k.$$

Il n'y a plus qu'à développer par rapport à cette première ligne :

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & P(\lambda) \\ -1 & \lambda & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & a_{n-1}+\lambda \end{vmatrix} = (-1)^{1+n} P(\lambda) \begin{vmatrix} -1 & \lambda & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Or ce dernier déterminant vaut $(-1)^{n-1}$ (matrice triangulaire !).

Finalement,

$$\boxed{\chi_A = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k.}$$

Ce résultat est important, car il montre que tout polynôme de terme dominant X^n peut être vu comme le polynôme caractéristique d'une certaine matrice carrée d'ordre n (et donc d'un certain endomorphisme).

7) Soit Q un polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$, n son degré ; Q peut s'écrire $\alpha.P$ avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et P unitaire, de la forme

$$P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \quad \text{où} \quad (a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n.$$

Grâce à la question **6)**, je dispose d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\chi_A = P$.

Or on a montré à la question **5)** que $\mathcal{P}(n, \mathbb{C})$ est vraie, donc A admet au moins une valeur propre λ dans $\mathbb{C}$. λ est alors racine de P, donc de Q. Par conséquent :

$$\boxed{\text{Tout polynôme non constant de } \mathbb{C}[X] \text{ admet au moins une racine dans } \mathbb{C}.}$$

(Ce qui est bien le théorème de D'ALEMBERT *!)*

Problème B

1) Premières propriétés

a) Le résultat est immédiat puisque l'égalité $(\mu-\lambda)x = 0$ entraîne, sachant que x est non nul, $(\mu-\lambda) = 0$.

$$\boxed{\text{Pour } x \neq 0 \text{ dans } E, \text{ il existe au plus un complexe } \mu \text{ tel que } u(x) = \mu x.}$$

b) Si x est un vecteur co-propre de u associé à μ et α un réel, alors :

$$u\left(e^{i\alpha}x\right) = e^{-i\alpha}u(x) = e^{-i\alpha}\mu x = \left(\mu e^{-2i\alpha}\right)e^{i\alpha}x.$$

Il suffit donc de prendre $\alpha = -\dfrac{\theta}{2}$ et $y = e^{-i\theta/2}x$ qui est non nul et vérifie : $u(y) = \mu e^{i\theta}y$.

$$\boxed{y = e^{-i\theta/2}x \text{ est donc un vecteur co-propre de } u \text{ associé à la valeur co-propre } \mu e^{i\theta}.}$$

Cette propiété prouve donc que dès qu'une application semi-linéaire u admet une valeur co-propre non nulle, elle en admet une infinité (de même module) dont une réelle positive (en prenant $\theta = -\arg(\mu)$). De plus, il suffit de connaître les valeurs co-propres réelles positives pour les avoir toutes : le "co-spectre" de u sera la réunion dans le plan complexe des cercles centrés en O et de rayon les valeurs co-propres réelles positives ; **la notion d'éléments co-propres d'une application semi-linéaire est donc sensiblement différente, malgré la définition, de la notion d'éléments propres d'une application linéaire**.

c) Puisque u est un morphisme additif de E (choisir $a = 1$ dans la définition), l'ensemble $E_\mu = (u - \mu \mathrm{I}_E)^{-1}(\{0\})$ est un sous-groupe additif de E. Étudions la stabilité pour la loi externe : soit x un vecteur de E_μ et a dans $\mathbb{C}$.

$$ax \in E_\mu \Leftrightarrow u(ax) = \mu ax \Leftrightarrow \overline{a}\mu x = \mu a x \Leftrightarrow (x = 0) \quad \text{ou} \quad (\overline{a} - a = 0) \quad \text{ou} \quad (\mu = 0)$$

On en déduit immédiatement que E_μ est toujours un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et qu'il n'est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ que si $\mu = 0$, puisqu'il n'est pas réduit au vecteur nul quand μ est une valeur co-propre.

d) $u \circ v$ est un morphisme additif de E dans E puisque u et v le sont; de plus, par involutivité de la conjugaison :

$$\forall (a,x) \in C \times E,\ (u \circ v)(ax) = u(\overline{a}v(x)) = a(u \circ v)(x).$$

En conclusion

$$\boxed{\text{Si } u \text{ et } v \text{ sont semi-linéaires, l'application } u \circ v \text{ est linéaire.}}$$

2) Matrice associée à une application semi-linéaire

a) Si $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$, alors — u étant semi-linéaire — $u(x) = \sum_{j=1}^{n} \overline{x_j} u(e_j)$. Je décompose les $u(e_j)$ dans la base $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \le i \le n}$:

$$\forall j \in [\![1,n]\!] \quad u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i \quad \text{et} \quad u(x) = \sum_{j=1}^{n} \overline{x_j} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \overline{x_j} \right) e_i.$$

Ainsi, le vecteur colonne des coordonnées dans $\mathcal{B}$ de $y = u(x)$ s'écrit

$$\boxed{Y = A\overline{X} \quad \text{où} \quad A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).}$$

b) Soit $\mathcal{B}' = (f_i)_{1 \le i \le n}$ la nouvelle base, S la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, X (*resp.* X') et Y (*resp.* Y') les vecteurs colonne des coordonnées de $x \in E$ et $y = u(x)$ dans $\mathcal{B}$ (*resp.* $\mathcal{B}'$). J'ai

$$X = SX' \ , \ Y = SY' = A\overline{X} \quad \text{d'où} \quad Y' = S^{-1}Y = S^{-1}A\overline{X} = \left(S^{-1}A\overline{S}\right)\overline{X'}.$$

En effet, la définition du produit matriciel et les propriétés de la conjugaison dans $\mathbb{C}$ montrent que $\overline{SX'} = \overline{S}\,\overline{X'}$. En prenant pour X' le j^{e} vecteur de la base canonique, je constate que la j^{e} colonne de $S^{-1}A\overline{S}$ contient les coordonnées dans $\mathcal{B}'$ du vecteur $u(f_j)$: il s'agit de la matrice associée à u dans $\mathcal{B}'$.

$$\boxed{B = S^{-1}A\overline{S}.}$$

3) Exemples

a) Pour $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, la relation $A\overline{X} = \mu X$ est équivalente à $(\overline{b} = -\mu a,\ \overline{a} = \mu b)$. D'où par conjugaison de la deuxième relation et report dans la première : $\overline{b} = -\mu\overline{\mu}\overline{b} = -|\mu|^2\overline{b}$. Comme $1 + |\mu|^2 > 0$ on obtient nécessairement $b = 0$ puis $a = 0$, donc $X = 0$ qui ne peut être vecteur co-propre :

$$\boxed{A \text{ n'a ni vecteur co-propre, ni valeur co-propre.}}$$

b) Si A est réelle et admet une valeur propre réelle λ, alors λ est une racine réelle du polynôme caractéristique de cette matrice et donc une valeur propre de A considérée dans l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: il existe donc un vecteur propre réel X associé à λ :

$$AX = \lambda X = A\overline{X}.$$

Ainsi A admet λ comme valeur co-propre.

$$\boxed{A \text{ admet au moins une valeur co-propre.}}$$

4) Correspondance entre les valeurs co-propres de A et les valeurs propres de $A.\overline{A}$

a) Soit X un vecteur co-propre de A associé à μ : $A\overline{X} = \mu X$ et puisque la conjugaison, automorphisme involutif du corps $\mathbb{C}$, est compatible avec le produit matriciel :

$$A\overline{A}X = A\overline{A\overline{X}} = A\overline{\mu X} = \overline{\mu}A\overline{X} = \overline{\mu}\mu X = |\mu|^2 X.$$

Puisque X est non nul, X est vecteur propre de $A.\overline{A}$ associé à la valeur propre $|\mu|^2$.

$$\boxed{|\mu|^2 \text{ est valeur propre de } A.\overline{A}.}$$

b) <u>1^er cas</u> : $A.\overline{X}$ et X sont liés. Comme X est non nul, il existe un nombre complexe μ tel que : $A.\overline{X} = \mu X$ et μ est donc une valeur co-propre de A. Les calculs du **4)a)** et l'unicité d'une valeur propre associée à un vecteur propre, montrent que $|\mu|^2 = \lambda$ et donc $|\mu| = \sqrt{\lambda}$. Utilisons maintenant la remarque rédigée à la question **1)b)**, valable ici pour l'application semi-linéaire u de $\mathbb{C}^n$, caractérisée par sa matrice A dans la base canonique (compte tenu des définitions, les éléments co-propres de u et de A sont les mêmes) : tous les nombres complexes de même module que μ sont des valeurs co-propres de A et en particulier parmi eux $|\mu| = \sqrt{\lambda}$.

2ᵉ cas : $A\overline{X}$ et X sont indépendants. Il est donc impossible d'obtenir X comme vecteur co-propre de A, mais cherchons une combinaison linéaire non triviale, $\alpha A\overline{X} + \beta X$ qui soit vecteur co-propre de A associé à la valeur co-propre $\sqrt{\lambda}$:

$$A\overline{\left(\alpha A\overline{X} + \beta X\right)} = \sqrt{\lambda}\left(\alpha A\overline{X} + \beta X\right) \Leftrightarrow \overline{\alpha} A\overline{A}X + \overline{\beta} A\overline{X} = \beta\sqrt{\lambda}X + \alpha\sqrt{\lambda}A\overline{X} \Leftrightarrow \left(\overline{\beta} = \alpha\sqrt{\lambda} \quad \text{et} \quad \overline{\alpha}\lambda = \beta\sqrt{\lambda}\right)$$

puisque par hypothèse $A\overline{A}X = \lambda X$ et que la famille $\left(A\overline{X}, X\right)$ est libre. Les valeurs $\alpha = 1$ et $\beta = \sqrt{\lambda}$ vérifient les conditions ci-dessus ; on obtient alors le vecteur non nul (car la famille $\left(A\overline{X}, X\right)$ est libre) $Y = A\overline{X} + \sqrt{\lambda}X$ qui convient.

Dans tous les cas :

$$\boxed{\sqrt{\lambda} \text{ est une valeur co propre de } A.}$$

c) La condition est nécessaire d'après **4)a)** et suffisante d'après **4)b)** (μ étant un réel positif, $\sqrt{\mu^2} = \mu$).

$$\boxed{\mu \in \mathbb{R}^+ \text{ est valeur co-propre de } A \text{ si et seulement si } \mu^2 \text{ est valeur propre de } A.\overline{A}.}$$

d) Il suffit, compte tenu du résultat précédent, d'étudier les valeurs propres réelles et positives de la matrice $A_m\overline{A_m} = A_m^2 = \begin{pmatrix} m^2-1 & -m \\ m & -1 \end{pmatrix}$ (m est réel).

Or le polynôme caractéristique $\chi_{A_m^2}(X) = X^2 - (m^2-2)X + 1$ est un trinôme de discriminant

$$\Delta = (m^2-2)^2 - 4 = m^2(m^2-4) \ ;$$

les deux racines, lorsqu'elles existent dans $\mathbb{R}$, sont de produit 1 et donc de même signe, qui est aussi celui de leur somme $S = m^2 - 2$. Ainsi il y a des racines réelles (qui sont aussi les valeurs propres) si et seulement si $m = 0$ (-1 est alors valeur propre double) ou $m^2 \geq 4$ et dans ce dernier cas elles sont positives ($S = m^2 - 2 \geq 2$). Compte tenu du **4)c)**, la condition $|m| \geq 2$ est donc nécessaire et suffisante pour que la matrice A_m admette des valeurs co-propres réelles positives qui sont

$$\mu = \sqrt{\frac{m^2 - 2 + m\sqrt{m^2-4}}{2}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\mu}$$

(dans le cas $m = \pm 2$, il y a une valeur propre double 1 et donc une valeur co-propre réelle de A_m égale à 1).

Remarquons que le cas $m = 0$ correspond à l'exemple du **3)a)** *pour lequel la matrice A n'a pas de valeur co-propre conformément à* **4)a)** *et à l'étude ci-dessus.*

5) Cas d'une matrice triangulaire supérieure

a) Les résultats des questions **4)c)** et **1)b)** conduisent aux équivalences suivantes :

$\forall \mu \in \mathbb{C}$ (μ valeur co-propre de A) $\Leftrightarrow$ ($|\mu|$ valeur co-propre de A) $\Leftrightarrow$ $\left(|\mu|^2 \text{ valeur propre de } A\overline{A}\right)$

Si maintenant A est une matrice triangulaire, d'éléments diagonaux $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ qui en sont donc les valeurs propres, alors $A\overline{A}$ est encore triangulaire et d'éléments diagonaux $(|\lambda_1|^2, \ldots, |\lambda_n|^2)$ qui en sont les valeurs propres. D'après la caractérisation des valeurs co-propres que l'on vient de démontrer, les valeurs co-propres de A sont exactement les complexes μ tels que $|\mu|^2$ soit valeur propre de la matrice $A\overline{A}$ et donc ici tels que $|\mu|$ soit de même module qu'une des valeurs propres de A ; c'est bien le cas de la valeur $\lambda e^{i\theta}$ proposée.

$$\boxed{\text{Pour tout } \theta,\ \lambda e^{i\theta} \text{ est une valeur co-propre de } A.}$$

b) De même, si μ est une valeur co-propre de A, μ a même module qu'une valeur propre λ de A et donc sera de la forme $\mu = \lambda e^{-i\theta}$ (avec θ réel).

$$\boxed{\text{Il existe } \theta \text{ réel tel que } \mu e^{i\theta} \text{ soit valeur propre de } A.}$$

Finalement pour une matrice A triangulaire, son "co-spectre" est la réunion dans le plan complexe des cercles centrés en O et rencontrant son spectre.

c) A est ici triangulaire et d'après **5)a)**, les valeurs co-propres de A sont **exactement les complexes de module 1**, ce qui est le cas de 1. Cherchons un vecteur co-propre X associé à 1. Si $a+ib$ et $c+id$ sont les écritures algébriques des coordonnées de X, $A\overline{X} = \begin{pmatrix} (b+c)+i(a-d) \\ d+ic \end{pmatrix}$, d'où

$$A\overline{X} = X \Leftrightarrow \begin{cases} (b+c)+i(a-d) = a+ib \\ d+ic = c+id \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b+c \\ d = c \end{cases}.$$

Finalement,

$$\boxed{\text{Les vecteurs co-propres de } A \text{ associés à 1 sont les } X = \begin{pmatrix} b(1+i)+c \\ c(1+i) \end{pmatrix},\ (b,c) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.}$$

Conformément au **1)c)**, on trouve $E_1(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}\right)$.

6) Une caractérisation des valeurs co-propres

B (*resp.* C) est la matrice dont les coefficients sont les parties réelles (*resp.* les parties imaginaires) des coefficients de A.

Remarquons tout d'abord, ce qui facilitera les calculs qui vont suivre, que d'après l'étude du **1)b)**, μ est valeur co-propre de A si et seulement si $|\mu|$ l'est.

Soit X un vecteur non nul décomposé sous la forme $X = Y + iZ$, où Y et Z sont respectivement les parties réelles et imaginaires de X ; on a les équivalences suivantes :

$$\left(A\overline{X} = |\mu|\,X\right) \Leftrightarrow BY + CZ + i(CY - BZ) = |\mu|\,Y + i\,|\mu|\,Z \Leftrightarrow \begin{cases} BY + CZ = |\mu|\,Y \\ CY - BZ = |\mu|\,Z \end{cases}.$$

Le système obtenu est équivalent au système de taille $2n$, défini par les blocs suivants :

$$\begin{pmatrix} B & C \\ C & -B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} = |\mu| \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

Or X est non nul si et seulement si $\begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}$ est non nul, donc

$$\boxed{\mu \text{ est valeur co-propre de } A \text{ si et seulement si } |\mu| \text{ est valeur propre de } D = \begin{pmatrix} B & C \\ C & -B \end{pmatrix}.}$$

On mesure l'intelligence d'un individu à la quantité d'incertitudes qu'il est capable de supporter.

Emmanuel Kant