D.S. 2

Les problèmes **A** *et* **B** *sont indépendants.*

Problème A : théorème de d'Alembert

Le but de ce problème est de démontrer le théorème de D'ALEMBERT, qu'il conviendra donc de ne pas utiliser ! Concernant l'existence de racines pour un polynôme, on devra se contenter des deux résultats suivants, que l'on admettra :

- tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair admet au moins une racine dans $\mathbb{R}$ (ce qui découle du théorème des valeurs intermédiaires) ;
- tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré 2 se factorise en produit de deux polynômes de degré 1 (ce qui découle de l'existence de la fonction racine carrée de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$).

On considère les deux propriétés suivantes, dépendant d'un entier naturel non nul n et du corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) :

- $\mathcal{P}(n, \mathbb{K})$: "dans tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n, tout endomorphisme possède au moins une valeur propre" ;
- $\mathcal{Q}(n, \mathbb{K})$: "dans tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n, pour tout couple (f, g) d'endomorphismes de E tel que $f \circ g = g \circ f$, il existe au moins un vecteur propre commun à f et à g".

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, comme dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on notera $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base canonique.

On rappelle que $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et ses sous-espaces vectoriels peuvent aussi être considéré comme des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. On notera $\dim_{\mathbb{C}}$ (*resp.* $\dim_{\mathbb{R}}$) la dimension en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel (*resp.* $\mathbb{R}$-espace vectoriel). Ainsi, par exemple : $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = n^2 \quad$ et $\quad \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = 2n^2$.

1) Montrer que $\mathcal{P}(n, \mathbb{R})$ est vraie pour tout n entier naturel impair.

2) **a)** Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n impaire et (f, g) un couple d'endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$. Soit λ une valeur propre de f (il en existe d'après **1)**).

Si $f = \lambda \mathrm{Id}_E$, montrer que f et g admettent au moins un vecteur propre commun.

Si $f \neq \lambda \mathrm{Id}_E$, montrer que $\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{I}_E)$ et $\mathrm{Im}(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$ sont deux sous-espaces vectoriels stricts de E, stables par g.

b) Montrer par récurrence que $\mathcal{Q}(n, \mathbb{R})$ est vraie pour tout n entier naturel impair.

3) Soit n un entier naturel impair. On se propose de montrer que $\mathcal{P}(n, \mathbb{C})$ est vraie.

On considère pour cela un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension n et f un endomorphisme de E.

Soit $\mathcal{B}$ une base de E et A la matrice de f dans $\mathcal{B}$.

a) Si $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $\overline{B} = \left(\overline{b_{i,j}}\right)$.

Montrer que $H = \left\{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \ / \ {}^t B = \overline{B}\right\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que $\dim_{\mathbb{R}} H = n^2$.

b) Montrer qu'en posant :

$$\forall B \in H \quad u(B) = \frac{1}{2}\left(A \times B + B \times {}^t\overline{A}\right) \quad \text{et} \quad v(B) = \frac{1}{2\mathbf{i}}\left(A \times B - B \times {}^t\overline{A}\right) \quad (\text{où} \quad \mathbf{i}^2 = -1)$$

on définit deux endomorphismes u et v de H tels que $u \circ v = v \circ u$.

c) En appliquant $\mathcal{Q}\left(n^2, \mathbb{R}\right)$, montrer l'existence d'une matrice B non nulle de H et de deux réels x, y tels que $AB = (x + \mathbf{i}y)B$.

d) En déduire que $\mathcal{P}(n, \mathbb{C})$ est vraie *(on pourra s'intéresser aux vecteurs colonnes de B).*

4) On note enfin, pour tout entier naturel k, $\mathcal{R}(k)$ la propriété suivante :

$\mathcal{R}(k)$: "$\mathcal{P}\left(2^\ell p, \mathbb{C}\right)$ et $\mathcal{Q}\left(2^\ell p, \mathbb{C}\right)$ sont vraies pour tout $\ell \in [\![0, k]\!]$ et tout p entier naturel impair".

On se propose de montrer que $\mathcal{R}(k)$ est vraie pour tout k, par récurrence sur k.

a) Montrer que $\mathcal{R}(0)$ est vraie.

b) Soit alors $k \geq 1$ tel que $\mathcal{R}(k-1)$ soit vraie *(hypothèse de récurrence)*.
Pour établir $\mathcal{P}\left(2^k p, \mathbb{C}\right)$, on considère un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension $n = 2^k p$ et f un endomorphisme de E. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et A la matrice de f dans $\mathcal{B}$.

(i) Montrer que $L = \left\{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \ / \ {}^t B = -B\right\}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et que $\dim_{\mathbb{C}} L$ est de la forme $2^{k-1}q$ où q est un entier naturel impair.

(ii) Montrer qu'en posant :

$$\forall B \in L \quad u(B) = A \times B + B \times {}^t A \quad \textit{et} \quad v(B) = A \times B \times {}^t A,$$

on définit deux endomorphismes u et v de L tels que $u \circ v = v \circ u$.

(iii) En appliquant $\mathcal{R}(k-1)$, montrer l'existence d'une matrice B non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et de deux complexes x, y tels que $\left(A^2 - xA + yI_n\right) \times B = 0$ (où I_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).

(iv) En déduire que $\mathcal{P}\left(2^k p, \mathbb{C}\right)$ est vraie *(on pourra utiliser la factorisation dans $\mathbb{C}$ du polynôme $X^2 - xX + y$ et s'intéresser aux vecteurs colonnes de B)*.

(v) Établir enfin $\mathcal{Q}\left(2^k p, \mathbb{C}\right)$, en s'inspirant de la méthode du **2)**.

c) Conclure.

5) Déduire de ce qui précède que $\mathcal{P}(n, \mathbb{C})$ et $\mathcal{Q}(n, \mathbb{C})$ sont vraies pour tout entier naturel non nul n.

6) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et A la matrice suivante de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Déterminer le polynôme caractéristique de A.

7) Conclure en démontrant le théorème de D'ALEMBERT.

La chance existe.

Sinon, comment expliquer la réussite des autres ?

(Sacha Guitry)

Problème B

Dans tout le problème, l'entier n est supérieur ou égal à 1 ($n \geq 1$) ; E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n.
Le but de ce problème est d'étudier les applications semi-linéaires de l'espace vectoriel complexe E dans lui-même et leurs valeurs et vecteurs co-propres.

Une application u de E dans lui-même est *semi-linéaire* si elle possède la propriété suivante :
"Pour tout scalaire a et tout couple (x, y) de vecteurs de E, on a : $u(ax + y) = \overline{a}u(x) + u(y)$."
(Le nombre complexe $\overline{a}$ est le conjugué de a.)

Un complexe μ est *une valeur co-propre* de l'application semi-linéaire u s'il existe un vecteur non nul x de E tel que $u(x) = \mu x$. Le vecteur x est *un vecteur co-propre* associé à la valeur co-propre μ.

1) Premières propriétés : soit u une application semi-linéaire de l'espace vectoriel E.

a) Démontrer qu'étant donné un vecteur x différent de 0, appartenant à l'espace E, il existe au plus un nombre complexe μ tel que la relation $u(x) = \mu x$ ait lieu.

b) Démontrer que, si le nombre complexe μ est une valeur co-propre de l'application semi-linéaire u, pour tout réel θ, le nombre complexe $\mu e^{i\theta}$ est encore valeur co-propre de l'application semi-linéaire u. Exprimer un vecteur co-propre associé à la valeur co-propre $\mu e^{i\theta}$ en fonction d'un vecteur co-propre x associé à la valeur co-propre μ et du réel θ.

c) Étant donnée une valeur co-propre μ de l'application semi-linéaire u, soit E_μ l'ensemble des vecteurs x de l'espace vectoriel E qui vérifient la relation $u(x) = \mu x$: $E_\mu = \{x \in E \;/\; u(x) = \mu x\}$.
Est-ce que l'ensemble E_μ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ? un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

d) Étant données deux applications semi-linéaires u et v, étudier la linéarité de l'application composée $u \circ v$.

2) Matrice associée à une application semi-linéaire : soit u une application semi-linéaire de l'espace vectoriel E ; soit $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de l'espace vectoriel E.

À un vecteur x, de coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$, est associée une matrice-colonne X, d'éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$, encore appelée (abusivement) vecteur.

a) Démontrer qu'à l'application semi-linéaire u est associée dans la base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ de E une matrice A, carrée complexe d'ordre n, telle que la relation $y = u(x)$ s'écrive :
$$Y = A.\overline{X}.$$
(La matrice-colonne $\overline{X}$ est la matrice complexe conjuguée de la matrice-colonne X.)

b) Soient A et B les matrices associées à une même application semi-linéaire u dans les bases $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(f_j)_{1\leq j\leq n}$ respectivement.
Soit S la matrice de passage de la base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ à la base $(f_j)_{1\leq j\leq n}$.
Exprimer la matrice B en fonction des matrices A et S.

Étant donnée une matrice carrée A, complexe d'ordre n, le vecteur X, différent de 0, ($X \neq 0$) est *un vecteur co-propre de la matrice A, associé à la valeur co-propre* μ, si le vecteur X et le nombre complexe μ vérifient la relation matricielle ci-dessous :
$$A.\overline{X} = \mu X.$$
Dans la suite toutes les matrices considérées sont des matrices carrées complexes.

3) Exemples

a) Soit A la matrice d'ordre 2 définie par la relation suivante : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Rechercher les valeurs co-propres μ et les vecteurs co-propres $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ associés.

b) Démontrer que, si une matrice A est réelle et admet une valeur propre réelle λ, cette matrice a au moins une valeur co-propre.

4) Correspondance entre les valeurs co-propres de la matrice A et les valeurs propres de la matrice $A.\overline{A}$: soit A une matrice carrée complexe d'ordre n.

a) Démontrer que, si le scalaire μ est une valeur co-propre de la matrice A, le nombre réel $|\mu|^2$ est une valeur propre de la matrice $A.\overline{A}$.

b) Soit λ une valeur propre positive ou nulle ($\lambda \geq 0$) de la matrice $A.\overline{A}$ et X un vecteur propre associé :

$$A.\overline{A}.X = \lambda X.$$

Démontrer que le réel $\sqrt{\lambda}$ est une valeur co-propre de la matrice A en envisageant les deux cas suivants :

(i) les vecteurs $A.\overline{X}$ et X sont liés ;

(ii) les vecteurs $A.\overline{X}$ et X sont indépendants.

c) En déduire que, pour que le réel positif ou nul μ soit valeur co-propre de la matrice A, il faut et il suffit que le réel μ^2 soit valeur propre de la matrice $A.\overline{A}$.

d) Étant donné un réel m, soit A_m la matrice définie par la relation suivante :

$$A_m = \begin{pmatrix} m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs co-propres réelles positives ; discuter suivant les valeurs du réel m.

5) Cas d'une matrice triangulaire supérieure : dans cette question, la matrice A est une matrice triangulaire supérieure (les éléments situés au-dessous de la diagonale principale sont nuls).

a) Démontrer que, si λ est une valeur propre de la matrice A, alors pour tout réel θ, le nombre complexe $\lambda e^{i\theta}$ est une valeur co-propre de la matrice A.

b) Démontrer que, si μ est une valeur co-propre de la matrice A, il existe un réel θ tel que le nombre complexe $\mu e^{i\theta}$ soit valeur propre de la matrice A.

c) Soit A la matrice définie par la relation suivante :

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

Démontrer que le réel 1 est valeur co-propre de cette matrice et déterminer un vecteur X co-propre associé. On pourra poser : $X = \begin{pmatrix} a+ib \\ c+id \end{pmatrix}$.

6) Une caractérisation des valeurs co-propres : soit A une matrice carrée complexe d'ordre n ; soient B et C les matrices réelles définies par la relation suivante :

$$A = B + iC.$$

Démontrer que le nombre complexe μ est valeur co-propre de la matrice A si et seulement si le nombre réel $|\mu|$ est une valeur propre de la matrice D, carrée réelle d'ordre $2n$, définie par blocs par la relation suivante :

$$D = \begin{pmatrix} B & C \\ C & -B \end{pmatrix}.$$

⋆ ⋆
⋆